

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2003

FILIÈRE **PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Pfaffien d'une matrice antisymétrique

Le but du problème est d'étudier une application définie sur les matrices antisymétriques réelles d'ordre pair, dont le carré est l'application déterminant.

Toutes les matrices considérées sont à coefficients *réels*. Une matrice d'ordre p , $p \in \mathbf{N}^*$, est une matrice carrée à p lignes et p colonnes. On désigne par id_E l'application identité d'un espace vectoriel E , par I_p la matrice identité d'ordre p et par 0_p la matrice nulle d'ordre p . On note \mathcal{A}_p l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre p .

Première partie

1. Montrer que si A est une matrice antisymétrique d'ordre impair, $\text{Det} A = 0$.

2. Soit D une matrice diagonale d'ordre m , $m \in \mathbf{N}^*$. Calculer en fonction des coefficients diagonaux de D le déterminant de la matrice d'ordre $2m$, $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$.

Soit $(E, (\ |))$ un espace vectoriel euclidien. Dans tout le problème f est un endomorphisme de E tel que

$$f^* = -f .$$

où f^* désigne l'adjoint de f .

3. On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $f = 0$.

4. On suppose que $f^2 + \text{id}_E = 0$.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E .

b) Montrer que la dimension de E est paire.

c) Soit $v \in E$. À quelle condition les vecteurs v et $f(v)$ sont-ils linéairement indépendants ?

d) Soit F l'orthogonal du sous-espace vectoriel de E engendré par v et $f(v)$. Montrer que $f(F) \subset F$.

e) Soit $n = 2m$, $m \geq 1$, la dimension de E . Montrer qu'il existe une famille (v_1, \dots, v_m) de vecteurs de E telle que $(v_1, \dots, v_m, f(v_1), \dots, f(v_m))$ soit une base orthonormale de E . Quelle est la matrice de f dans cette base ?

5.a) Montrer que f^2 est diagonalisable dans \mathbf{R} . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f^2 et E_i l'espace propre correspondant à la valeur propre λ_i , $1 \leq i \leq k$. Montrer qu'on a une décomposition en somme directe orthogonale,

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i.$$

b) Montrer que, pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i \leq 0$.

c) Montrer que, pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$, $f(E_i) \subset E_i$.

6.a) En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_{2m}$, il existe une matrice orthogonale Q d'ordre $2m$ et une matrice diagonale D d'ordre m telles que

$$A = {}^t Q \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} Q.$$

b) En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_{2m}$, il existe une matrice M d'ordre $2m$ telle que $A = {}^t M \mathcal{J}_{2m} M$, où $\mathcal{J}_{2m} = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

Soit E un espace vectoriel réel et q un entier ≥ 2 . On appelle *forme q -linéaire alternée sur E* une application $\omega : E^q \rightarrow \mathbf{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(A) si x_1, \dots, x_q sont des vecteurs de E et s'il existe un entier i , $1 \leq i \leq q - 1$, tel que $x_i = x_{i+1}$, alors

$$\omega(x_1, \dots, x_q) = 0;$$

en d'autres termes, l'application s'annule si deux arguments consécutifs sont égaux ;

(B) pour tout entier i , $1 \leq i \leq q$, si $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q$ sont des vecteurs quelconques de E , l'application de E dans \mathbf{R} définie par $x \mapsto \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_q)$ est linéaire ; en d'autres termes, l'application ω est linéaire par rapport à chaque variable.

On note $\text{Alt}_q(E)$ l'ensemble des formes q -linéaires alternées sur E .

7.a) Soit $\omega \in \text{Alt}_q(E)$. Montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq q-1$, on a l'identité

$$\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_q) = -\omega(x_1, \dots, x_q),$$

pour tous x_1, \dots, x_q dans E ; en d'autres termes ω change de signe si l'on permute deux arguments consécutifs.

b) Soit $\omega \in \text{Alt}_q(E)$. Montrer que s'il existe des entiers i et j , $i \neq j$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq q$, tels que $x_i = x_j$, alors

$$\omega(x_1, \dots, x_q) = 0.$$

c) Montrer que, pour tout entier $q \geq 2$, $\text{Alt}_q(E)$ est un espace vectoriel réel.

d) On admet que si E est de dimension n , la dimension de $\text{Alt}_n(E)$ est égale à 1. Donner une base de cet espace vectoriel.

Soit $\omega \in \text{Alt}_2(E)$. On définit une suite $\omega^{(p)}$, p entier ≥ 1 , par la récurrence suivante : $\omega^{(1)} = \omega$, et si $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) &= \omega(x_1, x_2) \omega^{(p-1)}(x_3, \dots, x_{2p}) \\ &+ \sum_{i=3}^{2p-1} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{2p}) \\ &+ (-1)^{2p} \omega(x_1, x_{2p}) \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, x_{2p-1}), \end{aligned}$$

pour tous x_1, \dots, x_{2p} dans E . Chaque $\omega^{(p)}$ est donc une application de E^{2p} dans \mathbf{R} . On écrira en abrégé

$$\omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) = \sum_{i=2}^{2p} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{2p}).$$

8.a) Expliciter $\omega^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et montrer que $\omega^{(2)} \in \text{Alt}_4(E)$.

b) Montrer que, pour tout $p \geq 3$, $\omega^{(p)} \in \text{Alt}_{2p}(E)$.

9. On suppose à nouveau que $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace vectoriel euclidien et que f est un endomorphisme de E tel que $f^* = -f$. On pose, pour $x_1 \in E$, $x_2 \in E$,

$$\omega_f(x_1, x_2) = (x_1 | f(x_2)).$$

Montrer que $\omega_f \in \text{Alt}_2(E)$.

10. On suppose que $E = \mathbf{R}^{2m}$ muni de la structure euclidienne canonique. Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2m$ et soit f l'endomorphisme de \mathbf{R}^{2m} associé à A . On reprend les notations des questions **8.** et **9.**

a) Montrer qu'il existe un nombre réel $P(A)$ tel que

$$(\omega_f)^{(m)}(x_1, \dots, x_{2m}) = P(A) \text{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{2m}),$$

pour tous $x_1, \dots, x_{2m} \in E$, où $\text{Det}_{\mathcal{B}}$ désigne le déterminant dans la base canonique de \mathbf{R}^{2m} . Le nombre $P(A)$ est appelé *pfaffien* de A .

b) Calculer $P(A)$ lorsque $A \in \mathcal{A}_4$, en fonction des coefficients $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,4}$ de A .

c) Lorsque $A = \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$, où D est une matrice diagonale d'ordre m , calculer $P(A)$ en fonction des coefficients diagonaux de D , et déterminer un nombre réel α indépendant de D tel que

$$P(A) = \alpha \text{Det} D.$$

Troisième partie

11. Soit $A \in \mathcal{A}_{2m}$ et soit M une matrice d'ordre $2m$.

a) Montrer que ${}^t M A M \in \mathcal{A}_{2m}$.

b) Montrer que $P({}^t M A M) = \text{Det}(M)P(A)$.

12. En utilisant le résultat de la question 6.a), montrer que, pour $A \in \mathcal{A}_{2m}$,

$$(P(A))^2 = \text{Det}(A).$$

13. Soit $\Pi : \mathcal{A}_{2m} \rightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $\Pi({}^t M A M) = \text{Det}(M)\Pi(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}_{2m}$ et pour toute matrice M d'ordre $2m$. Montrer qu'il existe un nombre réel κ tel que, pour tout $A \in \mathcal{A}_{2m}$, $\Pi(A) = \kappa P(A)$.

14. Soit M une matrice d'ordre $2m$ telle que ${}^t M \mathcal{J}_{2m} M = \mathcal{J}_{2m}$, où \mathcal{J}_{2m} est la matrice définie à la question 6.b). Montrer que $\text{Det}(M) = 1$.

15.a) Soit B une matrice d'ordre m et soit $A = \begin{pmatrix} 0_m & -{}^t B \\ B & 0_m \end{pmatrix}$. Exprimer $P(A)$ en fonction de $\text{Det}(B)$.

b) Soient m_1 et m_2 des entiers ≥ 1 , $A_1 \in \mathcal{A}_{2m_1}$, $A_2 \in \mathcal{A}_{2m_2}$, et soit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_2, 2m_1} & A_2 \end{pmatrix},$$

où $0_{m,m'}$ désigne la matrice nulle à m lignes et m' colonnes. Exprimer $P(A)$ en fonction de $P(A_1)$ et de $P(A_2)$.

* *
*

Rapport de M^{me} Thérèse MERLIER et M. Emmanuel GERMAIN, correcteurs.

Appréciation générale

Cette année le sujet ne présentait aucune difficulté pour un mathématicien averti (même si certaines questions n'ont pas été traitées par les candidats), ainsi l'essentiel de la discrimination s'est fait sur la capacité à répondre rapidement et avec précision aux questions.

Mais de très nombreux candidats ont fait preuve de fébrilité :

– en ne lisant pas calmement le texte, ceux-ci se sont induits en erreur (par exemple dans la **question 5**, où l'on ne supposait plus que $f^2 = -Id$, ou en **5.c** en ne comprenant pas qu'il s'agissait des valeurs propres de f^2 et non pas de f). On pourrait même citer ce candidat qui pour la première question a démontré tout seul la **question 6** sans s'en apercevoir.

– en tentant de grapiller des points dans la **3^e partie** sans comprendre le sens de ces dernières questions : il s'agissait de montrer que le pfaffien était un invariant plus fin que le déterminant pour les matrices antisymétriques d'ordre pair et qu'il permettait de résoudre très facilement des questions comme la **question 14** qui avait été posée dans le sujet de 2001. Or les candidats ont juste essayé d'utiliser le déterminant comme outil ce qui ne permettait pas de conclure (et accessoirement ne rapportait aucun point).

et aussi de précipitation dans la rédaction :

– en n'utilisant pas le cours avec discernement ils ont perdu du temps dans la **question 5.a** en tentant de redémontrer un théorème quand il suffisait de le citer dans le contexte de l'épreuve (on n'imagine pas que leurs professeurs aient oublié de mettre en évidence l'équivalence entre l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres de l'espace E et la décomposition de E en somme directe orthogonale des sous-espaces propres). À l'inverse certains candidats ont appliqué sans la citer une formule hors programme sur le déterminant par bloc pour la **question 2**. Comme la majeure partie du temps la formule qu'a cru utiliser le candidat était erronée, ceux-ci ne doivent pas s'étonner de ne recueillir aucun point.

– en n'indiquant pas le cheminement de leur pensée même dans les questions simples (mais qui ne sont simples que parce qu'elles ont été amenées par les questions précédentes) comme à la **question 7.b** où les correcteurs ont estimé qu'une réponse du style

$$w(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = (-1)^{j-i-1} w(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

sans aucun autre commentaire si ce n'est « d'après **7.a** » ne convenait pas.

– enfin marginalement de mauvaises notations sont source d'erreurs grossières comme le symbole \cdot pour le produit scalaire, malgré l'énoncé qui indiquait une autre notation.

Ainsi on a pu voir la triple confusion dans la **question 3** : $f(x) \cdot f(x) = f^2(x) = 0$ où

le candidats prenait le \cdot pour un produit (de fonctions) et le produit pour la composition ! Mais aussi des formules du type de $f(x|y) = (f(x)|f(y))$ qui sont peut-être des indices que pour certains candidats les formules se suffisent à elles-mêmes et les notations induisent les formules sans se poser la question du sens à accorder aux relations ainsi produites.

Statistique

- Notes éliminatoires : 15 soit 1,1 %
- Notes maximales : 7 soit 0,5 %

$0 \leq N < 4$	6,1%
$4 \leq N < 8$	23,8%
$8 \leq N < 12$	39,3%
$12 \leq N < 16$	24,6%
$16 \leq N \leq 20$	6,1%

Analyse question par question

Première Partie

1* Un grand classique qui se démontre en une ligne ! Mais curieusement cette question n'a pas été réussie par plus de la moitié des candidats, dont beaucoup d'entre eux ont cherché à faire une récurrence improbable. Elle fait donc partie des quelques questions qui ont permis de faire la différence et qui sera indiquée par une astérisque.

2* Plein de méthodes ont été proposées pour cette question. Mais bien peu ont pu donner un résultat avec un signe correct.

3. Facile mais mérite une rédaction claire si les candidats veulent être distingués de ceux qui auront écrit par exemple « $(f(x)|f(y)) = 0$ donc $f(x) = 0$ ou $f(y) = 0$ donc $f = 0$. » !!

4.a) Les équations fonctionnelles ont été peu utilisées : par exemple $f^2 = -Id$ donne directement que f est inversible, d'inverse $-f$ sans passer par le calcul du noyau.

4.b) Cette question a été bien vue par les candidats !

4.c*) Seule question ouverte du sujet qui a complètement déstabilisé les candidats qui en général se sont arrêtés un peu vite dans leur analyse. Par exemple, après avoir montré que cette question pouvait avoir des rapports avec les vecteurs propres, bien peu se sont mis en devoir de les trouver.

4.d) Facile si l'énoncé est correctement lu.

4.e*) Comme pour le sujet de l'an passé, la majorité des candidats ne maîtrise pas ce type de raisonnement pourtant très classique en algèbre linéaire, non pas tant parce que la récurrence n'est pas très bien présentée que par le fait que le cœur du raisonnement est souvent traité avec flou et désinvolture.

5.a) Question de cours !

5.b,c) Petits calculs faciles.

6.a) Cette question aurait pu être une question discriminante, du style de **4.c** mais plus difficile puisqu'il s'agissait finalement de rassembler toutes les informations glanées dans la première partie. Elle n'a quasiment jamais été traitée (sauf par une bouillie incompréhensible d'arguments inaboutis et qui tournent en rond), il est dommage que même de futurs polytechniciens ne puissent pas se mettre à ce niveau.

6.b*) Petit calcul matriciel que certains ont pu faire.

Deuxième partie

7.a) Un grand classique du cours sur les formes alternées.

7.b) Facile ; les candidats sont donc notés sur leur capacité à expliquer de manière concise comment ils procèdent.

7.c) On ne dira jamais assez qu'il est préférable de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel si l'on veut éviter de se perdre dans la dizaine d'axiomes des espaces vectoriels.

7.d) Du cours ?

8.a) Facile.

8.b*) Finalement, de très nombreux candidats ont bien vu ce qu'il se passait quand $x_i = x_{i+1}$ pour $i \geq 2$. Par contre pratiquement personne ne s'est soucié du cas $i = 1$ et pourtant la formule donnant $\omega^{(p)}$ distingue le premier indice.

9. Facile.

10.a*) Facile également si l'on arrive la tête claire jusqu'ici. Mais cela ne concerne pas la moitié des candidats.

10.b) Un calcul simple à condition de bien comprendre comment $P(A)$ est défini.

10.c*) Comprendre que $P(A)$ s'exprimait par récurrence en fonction des éléments diagonaux de D montrait déjà une habileté certaine (en général les candidats ne maîtrisent pas plus ce type de questions que les raisonnements nécessaires aux question **4.e** ou **6.a**). Obtenir le signe correct pour α révèle les excellents candidats qui sont capables de tenir un calcul un peu long et un peu piègeux.

11.a) À priori facile et rédigeable en une demi-ligne. Que faut-il alors penser des candidats qui se lancent dans une page de calculs pour obtenir les coefficients matriciels du produit des trois matrices ?

11.b*) Cette question qui est loin d'être évidente a cependant permis à certains de montrer qu'ils avaient bien compris l'impact d'un changement de base sur le déterminant

et sur ω_f ainsi que ses puissances.

12*) Beaucoup plus facile mais révélant néanmoins une vision globale du problème. Assez souvent traitée mais parfois avec trop de précipitation dans la rédaction.

13. Aucun candidat n'a réellement abordé cette question.

14* Facile si l'on n'oubliait pas de dire que $P(\mathcal{J})$ était non nul.

15.a,b) Les candidats n'ont rien gagné à ne parler que du déterminant. Il s'agissait de questions pas très faciles qui demandaient plus que les 5 dernières minutes pour être abordées.