ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2003 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Résonance paramétrique

Ce problème propose une première approche mathématique de la résonance paramétrique, phénomène physique que l'on rencontre aussi bien dans les recherches sur le mouvement de la lune que dans la manière de faire démarrer une escarpolette, ou dans l'étude des matériaux semi-conducteurs.

Soit q une fonction réelle de la variable réelle t, continue et périodique de période $T > 0$,

$$\forall t \in \mathbf{R},\ q(t+T) = q(t)\ .$$

Soit λ un nombre complexe. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x'' + (\lambda - q(t))\, x = 0\ , \tag{1}$$

où x est une fonction complexe, de classe $\mathcal{C}^2$, de la variable réelle t.

Première partie

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation (1). Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel complexe.

2. Soient x_1 et x_2 deux solutions de (1). On pose $W(x_1,x_2) = x_1x_2' - x_1'x_2$. Montrer que $W(x_1,x_2)$ est indépendant de t.

3. Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur de translation par T qui, à une fonction complexe f, associe la fonction $\mathcal{T}(f)$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \mathcal{T}(f)(t) = f(t+T)\ .$$

a) Montrer que, si $f \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}$.

b) On désigne par τ la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}$. Est-ce un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$?

4.a) Montrer qu'il existe une unique solution x_1 de (1) telle que

$$x_1(0) = 1,\ x_1'(0) = 0\ ,$$

et une unique solution x_2 de (1) telle que

$$x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = 1\ .$$

b) Montrer que x_1 et x_2 forment une base de $\mathcal{E}$.

5. On désigne par M la matrice de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ dans la base (x_1, x_2).

a) Évaluer les coefficients de M en fonction de $x_i(T)$, $x_i'(T)$ $(i = 1, 2)$.

b) Évaluer $\mathrm{Det}(M)$.

On pose $\Delta = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M$, où Tr désigne la trace.

c) Évaluer Δ en fonction de $x_i(T)$, $x_i'(T)$ $(i = 1, 2)$.

6. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ sont racines du trinôme $P(\rho) = \rho^2 - 2\Delta\rho + 1$.

Soit $x \in \mathcal{E}$. On dit que x est *stable* si $|x|$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$. On dit que x est *fortement stable* si $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

7. On suppose Δ *réel* et $|\Delta| \neq 1$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est somme directe des sous-espaces propres de τ.

b) Montrer que, si $|\Delta| < 1$, toutes les solutions de (1) sont stables. Les fonctions propres de τ sont-elles fortement stables dans ce cas ?

c) Montrer que, si $|\Delta| > 1$, il existe une solution de (1) fortement stable. Est-elle unique ? Existe-t-il dans ce cas des solutions stables mais non fortement stables ?

8. On suppose que $\Delta = \varepsilon$, où $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

a) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{E}$ dans laquelle la matrice de τ est $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe.

b) On suppose $a \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, il existe une solution de (1) stable mais non fortement stable. Existe-t-il des solutions fortement stables ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe $T = \pi$ et l'on suppose λ *réel.* Pour indiquer la dépendance par rapport au paramètre λ et au choix de la fonction q, on note $\Delta_q(\lambda)$ la quantité Δ définie à la question **5**.

9. Dans cette question, on choisit q identiquement nulle, $q = 0$.

a) Calculer $\Delta_0(\lambda)$ en distinguant les cas suivant le signe de λ. La fonction $\lambda \mapsto \Delta_0(\lambda)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

b) Tracer le graphe de la fonction $\lambda \mapsto \Delta_0(\lambda)$, pour $\lambda \in \mathbf{R}$.

c) Déterminer la matrice M lorsque $q = 0$ et $\lambda = n^2$, $n \in \mathbf{N}$.

On va maintenant montrer que $\Delta_q(\lambda)$ est proche de $\Delta_0(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. On suppose $\lambda > 0$ et l'on pose $\omega = \sqrt{\lambda}$. On note Q le maximum sur $\mathbf{R}$ de la fonction $|q|$.

On pose $u_0(t,\omega) = \cos \omega t$, $v_0(t,\omega) = \dfrac{\sin \omega t}{\omega}$ et l'on définit par récurrence

$$u_n(t,\omega) = \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)\, u_{n-1}(s,\omega)\,\mathrm{d}s \ , \ n \geqslant 1 \ ,$$

$$v_n(t,\omega) = \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)\, v_{n-1}(s,\omega)\,\mathrm{d}s \ , \ n \geqslant 1 \ .$$

10. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ |u_n(t,\omega)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{\omega^n n!} \quad \text{et} \quad |v_n(t,\omega)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{\omega^{n+1} n!} \ .$$

11. On pose

$$x_1(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,\omega) \quad \text{et} \quad x_2(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t,\omega) \ .$$

Le paramètre ω étant fixé, montrer que l'on définit ainsi des fonctions continues de la variable $t \in \mathbf{R}$.

12. On note u'_n et v'_n les dérivées par rapport à t de u_n et v_n.

a) Calculer $u'_n(t,\omega)$ et $v'_n(t,\omega)$ sous forme d'intégrales contenant u_{n-1} et v_{n-1} respectivement.

b) Montrer que, pour $n \geqslant 1$,

$$\forall t \in \mathbf{R},\ |u'_n(t,\omega)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{\omega^{n-1} n!} \quad \text{et} \quad |v'_n(t,\omega)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{\omega^n n!} \ .$$

c) En déduire que x_1 et x_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable t.

13. Montrer que x_1 et x_2 satisfont les équations

$$x_1(t,\omega) = \cos\omega t + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega}\, q(s)\, x_1(s,\omega)\,\mathrm{d}s\ ,$$

$$x_2(t,\omega) = \frac{\sin\omega t}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega}\, q(s)\, x_2(s,\omega)\,\mathrm{d}s\ .$$

Les fonctions x_1 et x_2 sont-elles toujours des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la variable t ?

14.a) Montrer que x_1 et x_2 sont solutions de (1) pour $\lambda = \omega^2$.

b) Montrer que, si $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$,

$$\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi,\omega) + x_2'(\pi,\omega))\ .$$

15. Montrer que, pour $\lambda > 0$,

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant \exp\left(\frac{\pi Q}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1\ .$$

16. Dans cette question, on suppose de plus que $\displaystyle\int_0^\pi q(t)dt = 0$.

a) Montrer que

$$u_1(\pi,\omega) + v_1'(\pi,\omega) = 0\ .$$

b) En déduire que, pour $\lambda \to +\infty$,

$$\Delta_q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ .$$

17. On appelle intervalle d'instabilité un intervalle de $\mathbf{R}_+$ sur lequel $|\Delta_q(\lambda)| > 1$. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ assez grand pour que tout intervalle d'instabilité contenu dans $[\lambda_0, +\infty[$ soit contenu dans un intervalle $[(n-\alpha)^2, (n+\alpha)^2]$, pour un entier n. Que peut-on dire de la position des intervalles d'instabilité quand $\lambda \to +\infty$?

* *
*

Rapport de MM. Pierre LOCHAK et Andrei MOROIANU, correcteurs.

Le problème de cette année portait sur un phénomène d'une grande ubiquité physique et qui a donné lieu à de nombreux développements mathématiques, et ce jusqu'au jour d'aujourd'hui. Bien évidemment le problème lui-même n'aborde que le début de la théorie. Un(e) candidat(e) bien préparé(e) ne devait pas avoir de mal à traiter le début, jusqu'à la question **7.a** incluse, et c'est bien ce que l'on a pu constater, avec une nette cassure à la question **7.b** qui demandait une véritable compréhension de la situation. Dans la première partie, il s'agissait en somme de comprendre la pertinence de notions élémentaires d'algèbre linéaire dans un contexte où celle-ci n'apparaît pas de manière tout à fait évidente *a priori*. La seconde partie, jusqu'à la question **14**, reprenait des notions classiques d'analyse et n'avait pas de raison particulière de dérouter les candidats.

Du point de vue des statistiques, on notera que la moyenne s'établit cette année à 9,60 et l'écart-type ressort à 3,56. La répartition des notes des candidats français est la suivante :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	4,6%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	27,1%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	44,2%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	18,9%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	5,2%

Venons-en maintenant aux traditionnelles remarques plus techniques, en espérant que les candidats des prochaines années pourront en tirer un certain profit.

1, 2, 3.a Ces questions ont été correctement traitées par la grande majorité des candidats.

3.b Très souvent les candidats se sont contentés de vérifier l'injectivité du morphisme τ pour en déduire sa bijectivité. On rappelle ici qu'il fallait au moins mentionner le fait que $\mathcal{E}$ est de dimension finie. Par ailleurs il était très facile de vérifier la surjectivité directement.

4.a,b Questions de cours.

5a,b,c, 6, 7.a Une fois la matrice des coefficients determinée, les autres questions en étaient des corollaires directs.

7.b,c, 8.a,b C'est là le cœur de problème, que malheureusement trop peu de candidats ont traité. En dehors des difficultés qui n'avaient pas lieu d'être (comme le fait que les deux racines du trinôme $X^2 - 2\Delta X + 1$ sont des complexes de norme 1 si $|\Delta| < 1$), ce qui a le plus posé problème était de faire le passage entre la théorie « abstraite » des opérateurs linéaires et le cas concret où les vecteurs étaient des fonctions, solutions de l'équation donnée. Les candidats qui ont correctement traité ces questions ont été récompensés généreusement.

9.a,b,c La fonction $\lambda \mapsto \Delta_0(\lambda)$ a été souvent calculée correctement, mais seule une minorité de candidats est parvenue à montrer correctement qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$, en calculant les limites en 0 des dérivées sur $\mathbf{R}^+$ et $\mathbf{R}^-$. Le graphe a été le plus souvent bien traité et la matrice correctement calculée.

10. Une grande majorité des candidats a correctement traité cette question par récurrence. La seule difficulté consistait à faire apparaître un coefficient $\frac{1}{n+1}$ en intégrant s^n entre 0 et t.

11. Nos conseils de l'année dernière semblent avoir porté leurs fruits, car les convergences uniforme et normale étaient mieux maîtrisées cette année. Rappelons seulement que l'erreur la plus fréquente a été d'affirmer que la convergence était normale donc uniforme sur $\mathbf{R}$ tout entier, alors qu'en réalité elle ne l'était que sur les compacts de $\mathbf{R}$.

12.a Peu de candidats ont su dériver correctement cette intégrale dont les bornes dépendaient de t. En revanche le résultat correct à été obtenu par beaucoup, car le terme additionnel (contenant l'expression $\sin(t-t)$) s'annulait (ce qui n'est pas le cas à la question **14.a**). Ceux-là ont obtenu seulement une partie des points.

12.b L'erreur la plus fréquente a été de faire un raisonnement par récurrence, au mieux inutile, alors qu'il suffisait d'appliquer le résultat obtenu à la question **10**. On peut retenir le fait général que tous les énoncés dépendant d'un paramètre entier ne sont pas nécessairement à montrer par récurrence.

12.c Il suffisait (et il fallait!) invoquer le théorème de convergence et dérivabilité des séries, en utilisant la convergence normale donc uniforme de la série des dérivées $\sum u_n'$ sur tout segment, ainsi que la convergence simple en un point de la série $\sum u_n$.

13. À nouveau, la difficulté consistait à justifier correctement l'interversion de la somme infinie et l'intégrale sur un segment pour une série normalement convergente.

14.a,b Pour ceux qui savaient dériver une intégrale dont les bornes dépendaient du paramètre, ces questions n'ont pas posé de difficulté.

15. Peu de candidats ont résolu cette question, pourtant pas très difficile. Il suffisait d'écrire la différence que l'on désirait majorer comme la somme $\sum_{n\geq 1} u_n + v_n'$ et appliquer les majorations du **10** et **12.b**.

16.a Les quelques candidats qui sont arrivés jusqu'ici on correctement résolu cette question en appliquant les formules trigonométriques pour $\sin(\omega(t-s)+\omega s)$.

16.b Similaire à la question **15**, sauf que la sommation se fait à partir de $n=2$, grâce à **16**. En partie sans doute faute de temps, cette question a été rarement traitée.

17. Seulement une poignée de candidats a correctement traité cette question assez difficile.