ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2002 FILIÈRE PC

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

L'objet de ce problème est l'étude de systèmes régis par une équation différentielle dépendant d'une donnée appelée « commande » et la recherche de « commandes optimales ».

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^p$ et $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire euclidien. La *transposée* d'une matrice réelle M est notée M^*. On identifie un élément de $\mathbf{R}^p$ avec une matrice à p lignes et une colonne.

Dans ce problème, on appelle fonction *bien continue par morceaux* sur un intervalle $[0,T]$ de $\mathbf{R}$ toute fonction φ continue par morceaux, continue à gauche sur $[0,T]$ et continue à droite en 0, c'est-à-dire telle qu'il existe un nombre fini de points, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = T$ tels que φ est continue sur $[0,t_1],]t_1,t_2], \ldots,]t_{k-2},t_{k-1}],]t_{k-1},T]$ et que $\lim\limits_{\substack{t\to t_\ell \\ t>t_\ell}} \varphi(t)$ existe pour $\ell = 1,2,\ldots,k-1$.

Préliminaires

Soit $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à p lignes. Pour $M \in \mathcal{M}_p$, on pose

$$|||M||| = \sup_{\substack{X\in\mathbf{R}^p \\ X\neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|} .$$

1.a) Vérifier que $M \in \mathcal{M}_p \longmapsto |||M||| \in \mathbf{R}$ est une norme sur $\mathcal{M}_p$.

b) Montrer que, pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_p$,

$$|||MN||| \leqslant |||M|||\ |||N||| .$$

2.a) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$. Montrer que la suite $(S_n(M))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p$ muni de la norme $|||\cdot|||$.

On pose
$$e^M = \lim_{n\to+\infty} S_n(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \ .$$

b) Montrer que la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto e^{tM} \in \mathcal{M}_p$ est continue, dérivable et que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tM} = M\, e^{tM} \ .$$

c) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tM}\, e^{-tM})$ et, pour $s \in \mathbf{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{(s+t)M}\, e^{-tM})$. En déduire que
$$e^{(s+t)M} = e^{sM}\, e^{tM} \ .$$

Première partie

Soit T un réel > 0 et soit $A \in \mathcal{M}_p$. Soit B une fonction bien continue par morceaux sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, et soit $X_0 \in \mathbf{R}^p$. On pose, pour tout $t \in [0, T]$,
$$X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) \mathrm{d}s \ .$$

3.a) On suppose que B est continue. Montrer que $t \mapsto X(t)$ est l'unique fonction de classe C^1 sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ telle que $X(0) = X_0$ et, pour tout $t \in [0, T]$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = A\, X(t) + B(t) \ . \tag{1}$$

On suppose maintenant et dans toute la suite du problème que B est seulement bien continue par morceaux.

b) Montrer que $t \mapsto X(t)$ est l'unique fonction continue, dérivable en tout point où B est continue, et de classe C^1 par morceaux sur $[0, T]$ telle que $X(0) = X_0$ et que la condition (1) soit satisfaite en tout point où X est dérivable. *Par convention*, on dira encore que X est solution de l'équation différentielle (1) sur $[0, T]$.

Soit $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $q \leqslant p$ et soit K une matrice réelle à p lignes et q colonnes. On désigne par $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel des fonctions bien continues par morceaux sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^q$. A toute fonction $U \in \mathcal{U}$, on associe l'équation différentielle sur $[0, T]$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = A\, X(t) + K\, U(t) \ , \tag{2}$$
et l'on dit que U est la *commande du système* décrit par l'équation (2). On fixe $X_0 \in \mathbf{R}^p$. On désigne par X_U l'unique solution de (2) telle que $X_U(0) = X_0$.

4. Montrer que, pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe Y_V tel que, pour tout $U \in \mathcal{U}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on ait $X_{U+\lambda V} - X_U = \lambda Y_V$. Préciser l'équation différentielle et la condition initiale satisfaites par Y_V.

Soient α, β, γ des réels $\geqslant 0$. On considère la fonction $\mathcal{C} : \mathcal{U} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\mathcal{C}(U) = \int_0^T \Big(\alpha \|X_U(t)\|^2 + \beta \|U(t)\|^2\Big) dt \ + \ \gamma \|X_U(T)\|^2 \ ,$$

modélisant un coût que l'on cherche à rendre minimal. Soient $U, V \in \mathcal{U}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

5. Montrer que $\mathcal{C}(U + \lambda V) - \mathcal{C}(U)$ est un polynôme du second degré en λ et donner des expressions des coefficients de ce polynôme. Que peut-on dire du signe du coefficient de λ^2 ?

6.a) Montrer qu'il existe une unique fonction $Z_U : [0, T] \to \mathbf{R}^p$, de classe C^1, telle que $Z_U(T) = 2\gamma \, X_U(T)$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_U(t) = -A^* \, Z_U(t) - 2\alpha \, X_U(t) \ .$$

b) Exprimer $\Big(Z_U(T) | Y_V(T)\Big) + 2\alpha \displaystyle\int_0^T \Big(X_U(t) | Y_V(t)\Big) \mathrm{d}t$ par une intégrale de 0 à T faisant intervenir K, V et Z_U. $\Big[$On rappelle que pour des fonctions Z et Y à valeurs vectorielles, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(Z(t)\Big|Y(t)\Big) = \Big(\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(t)\Big|Y(t)\Big) + \Big(Z(t)\Big|\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t)\Big).\Big]$

7.a) Déduire des questions précédentes que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathcal{C}(U + \lambda V) = \int_0^T \Big(K^* Z_U(t) + 2\beta U(t) \Big| V(t)\Big) \mathrm{d}t \ .$$

b) Montrer que $U_0 \in \mathcal{U}$ vérifie la condition $\mathcal{C}(U_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$, si et seulement si, $\forall t \in [0, T], \ K^* \, Z_{U_0}(t) + 2\beta \, U_0(t) = 0$.

Deuxième partie

On conserve les notations de la première partie.

Soit J un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$, non réduit à un point, et soit J^q le cube qu'il définit dans $\mathbf{R}^q$. On considère l'ensemble $\widehat{\mathcal{U}}$ des commandes $U \in \mathcal{U}$ telles que $\forall \, t \in [0, T]$, $U(t) \in J^q$.

8.a) L'ensemble $\widehat{\mathcal{U}}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$?

b) Montrer que si $U, V \in \widehat{\mathcal{U}}$, $\lambda \in [0, 1]$, alors $U + \lambda(V - U) \in \widehat{\mathcal{U}}$.

9. Montrer que $U_0 \in \widehat{\mathcal{U}}$ vérifie la condition

$$\mathcal{C}(U_0) = \inf_{U \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(U)$$

si et seulement si, $\ \forall \, t \in [0, T], \ \forall \, V \in \widehat{\mathcal{U}}$,

$$\Big(K^* \, Z_{U_0}(t) + 2\beta \, U_0(t) \Big| V(t) - U_0(t)\Big) \geqslant 0 \ .$$

Dans l'application qui suit, on prend $p = 2$ et $q = 1$. On choisit $J = [-a, a]$, où $a > 0$. Soit k une constante réelle, $k > 0$.

Si $t \mapsto x(t)$ est une fonction deux fois dérivable, on pose

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \; .$$

Pour toute fonction $u \in \widehat{\mathcal{U}}$, on étudie les fonctions $t \mapsto x(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1, et de classe C^2 par morceaux telles que $\ddot{x}(t) = -k\, u(t)$ en tout point $t \in [0, T]$ où $\ddot{x}$ est définie.

10.a) Écrire ce problème sous la forme (2) avec des matrices A et K que l'on déterminera. Soient x_0 et v_0 des nombres réels. Montrer qu'il existe une unique fonction x_u solution de ce problème telle que $x_u(0) = x_0$ et $\dot{x}_u(0) = v_0$.

b) Trouver α, β, γ pour que $\mathcal{C}(u) = \Big(x_u(T)\Big)^2 + \Big(\dot{x}_u(T)\Big)^2$. Ces valeurs de α, β, γ sont choisies dans toute la suite du problème.

c) Montrer que Z_u est une fonction affine de t à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

11.a) Soit $u_0 \in \widehat{\mathcal{U}}$ tel que $x_{u_0}(T) = 0$ et $\dot{x}_{u_0}(T) = 0$. Montrer que $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$.

b) Soit $u_0 \in \widehat{\mathcal{U}}$ tel que

(i) $x_{u_0}(T)$ et $\dot{x}_{u_0}(T)$ ne sont pas tous deux nuls ;

(ii) $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$.

Montrer que la fonction u_0 est constante par morceaux.

12. On suppose que $x_0 = 1 + \dfrac{T^2}{2}\Big(1 + \dfrac{ka}{2}\Big)$, $v_0 = -\dfrac{T}{2}$.

a) On considère $u_0(t)$ telle que :

$$u_0(t) = a \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \quad , \quad u_0(t) = -a \text{ si } \frac{T}{2} < t \leqslant T \; .$$

Calculer $x_{u_0}(T)$ et $\dot{x}_{u_0}(T)$.

b) Montrer que $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$.

c) On considère le cas où $k\, a = \dfrac{1}{4}$ et $T = 4$. La fonction u_0 est-elle alors l'unique fonction de $\widehat{\mathcal{U}}$ telle que $\mathcal{C}(u_0) = \inf\limits_{u \in \widehat{\mathcal{U}}} \mathcal{C}(u)$?

* *
*

Rapport de MM. Pierre LOCHAK et Andrei MOROIANU, correcteurs.

Le problème portait sur des propriétés de contrôle de systèmes différentiels, autrement dit d'équations différentielles à valeurs matricielles. Il ne comportait guère de questions calculatoires, sauf à la fin, et ne demandait pas non plus de faire particulièrement preuve d'« astuce ».

Il était par contre évidemment nécessaire de prendre la mesure des objets mis en jeu, autrement dit essentiellement des fonctions de matrices à valeurs matricielles. Si nous soulignons ce point qui peut paraître évident, c'est que cette prise de conscience a fait défaut à de trop nombreux candidats.

C'est ce qui peut expliquer de grosses bêtises, y compris dans des copies par ailleurs très raisonnables. Ainsi trop de candidats écrivent que $Mx = 0$ et $x \neq 0$ implique que $M = 0$, où M est une matrice et x un vecteur. Ils savent pourtant fort bien par ailleurs qu'une matrice non inversible n'est pas nécessairement nulle. Bref, il semble utile de répéter aux candidats qu'il sera toujours salutaire de réfléchir quelques minutes à la nature des objets mis en jeu avant de se lancer tête baissée dans le problème, et peut-être pour ce faire de parcourir une fois l'énoncé en entier. De tels conseils sont évidemment plus faciles à donner qu'à appliquer, mais on ne rappellera non plus jamais assez le mot de Lafayette : « Allons lentement, nous sommes pressés ! ».

La moyenne s'établit cette année à 9,25 et l'écart-type ressort à 3,6. La répartition des notes est la suivante :

$0 < \mathrm{N} < 4$	5,9%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	33,8%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	37,0%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	19,6%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	3,7%

Faisons maintenant quelques remarques au fil de l'énoncé ; il ne s'agit certes pas d'établir un bêtisier, ce qui serait au mieux stérile, mais de noter quelques erreurs assez grossières et fréquentes pour être représentatives, et illustrer souvent ce qui précède.

1.a Cette question, ainsi que la suivante, a déjà été proposée lors du concours 2000. Il est assez consternant de constater que la grande majorité des candidats continue à faire les mêmes erreurs, par exemple ils oublient de vérifier que l'expression de la norme (définie par un sup) existe vraiment.

1.b Cette question a posé beaucoup de problèmes et a fait l'objet de nombreuses réponses erronées. Beaucoup finissent par confondre composition des matrices et produit scalaire, dans leur désir d'appliquer des inégalités du cours.

2.a Peu de copies traitent la question avec la concision voulue, s'en remettant souvent à une trop longue liste de justifications parmi lesquelles le correcteur est libre de choisir.

Rappelons ici que le seul critère de convergence dans un espace topologique complet est le Critère de Cauchy. Trop peu de candidats pensent à l'appliquer ...

2.b Cette question a souvent été correctement traitée, sauf pour le fait que beaucoup de candidats invoquent une soi-disante convergence uniforme sur tout l'axe réel. Il est fortement conseillé aux futurs candidats de réviser les différents types de convergence des séries de fonctions (simple, normale, uniforme).

3.a Le théorème de Cauchy-Lipschitz est souvent correctement appliqué. Certains commettent des fautes de logique, comme d'invoquer le fait que X est solution de (1) pour conclure à sa régularité.

Certain(e)s candidat(e)s démontrent directement l'unicité, ce qui est louable. Parmi eux cependant, il en est qui finissent par écrire des absurdités qu'il est inutile de citer ici.

3.b Cette question un peu subtile n'a été correctement traitée que dans très peu de copies, qui en ont été récompensées en conséquence.

4, 5 Ces deux questions relativement faciles ont été bien comprises et bien traitées pratiquement par tou(te)s les candidat(e)s qui avaient une bonne idée des objets qu'ils ou elles manipulent. Les autres sombrent souvent dans la confusion, surtout pour la question **5**.

6.a Très peu de candidats ont songé à appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz de manière rétrograde (en changeant par exemple t en $T - t$). Presque toutes les copies se contentent d'invoquer **3.a** de manière un peu évasive.

7.b Le fait que la condition donnée était bien nécessaire n'a été compris et montré que dans les meilleures copies, les autres se contentant de justifications qui tournent souvent à l'absurde (invoquant la positivité de fonctions à valeurs matricielles par exemple). Par ailleurs, le fait que U_0 est un infimum pour C si et seulement si quel que soit V, 0 est un infimum pour la fonction de t définie par $C(U_0 + tV)$, à été mentionné par très peu de candidats.

8.a Certains candidats affirment : « 0 » ne se trouve pas nécessairement dans J, donc $\hat{U}$ ne contient pas 0, et par conséquent n'est pas un espace vectoriel. Mais ils oublient de se demander ce qui se passe si J contient 0.

8.b Beaucoup trop de candidat(e)s paraissent guidé(e)s par l'implication psychologique, « qui dit intervalle fermé borné dit compacité », d'où de curieux mélanges et des affirmations comme « tout fermé borné de $\mathbf{R}$ est convexe », que le bon sens permet d'éviter.

9 Question très rarement traitée correctement, très peu de candidat(e)s s'avisant des problèmes au bord. Beaucoup de copies s'en remettent à la question **7** du soin de régler le problème.

10.a,b Ces questions ont été bien traitées par presque tous les candidats qui savent comment transformer une équation du deuxième ordre en système du premier ordre, c'est-à-dire tout de même une majorité.

10.c Les mêmes candidats ont souvent réussi encore ici, avec des degrés de précision variables dans les réponses.

11.a Un nombre surprenant de candidat(e)s ont vu que cette question pouvait être traitée sans du tout faire appel à la théorie développée dans le reste du problème. On ne peut que les louer de ce bon sens stratégique. Par contre la question **11.b** n'a été traitée correctement que dans quelques copies.

12.a Là encore beaucoup ont vu qu'il s'agissait d'une question en principe facile et ne faisant pas appel à ce qui précède. Elle a donc été souvent au moins attaquée, y compris par celles ou ceux qui semblaient un peu perdu(e)s dans la relative abstraction des questions précédentes. Il s'agissait ensuite de garder son sang-froid dans un calcul élémentaire mais propice aux erreurs.

12.b Une poignée de candidats ont remarqué qu'il suffisait d'appliquer la question **9**, à condition, bien entendu, d'avoir obtenu le résultat correct pour l'expression de Z_U.

12.c Aucun candidat n'a traité correctement cette question.