

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2001

FILIÈRE **PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

Les instruments à vent

Un instrument à vent est un tuyau sonore constitué d'un long tube de petit diamètre de section carrée ou circulaire. Dans la famille des *cuvres* le tuyau sonore est souvent enroulé sur lui même et se termine généralement par un pavillon. Le but de ce problème est l'étude des principales propriétés sonores résultant de cette géométrie. Dans la première partie on s'intéresse au principe de la propagation des sons dans un tuyau dans le cadre d'un modèle théorique simple. La seconde partie étudie le rôle de la longueur de l'instrument pour les notes émises. La troisième partie est dédiée à l'influence du diamètre de l'instrument et la quatrième à celle du pavillon.



Figure 1

Première partie
Propagation d'une onde sonore dans un tuyau

On s'intéresse à la propagation d'une onde acoustique sinusoïdale de pulsation ω et de longueur d'onde λ à l'intérieur d'un tuyau de section S , carrée ou circulaire, dont la dimension caractéristique transversale $D \sim \sqrt{S}$ est petite devant la longueur L du tuyau. On se limite dans cette partie aux cas où la longueur d'onde λ est grande devant D et on suppose que l'onde sonore peut être assimilée à une onde plane se propageant selon l'axe Ox du tuyau.

1. Au repos, l'état du fluide est caractérisé par la masse volumique ρ_0 et la pression P_0 qui sont uniformes ; le champ de vitesse \vec{v} est nul. Au passage de l'onde acoustique, l'état du fluide est alors décrit localement, dans une section droite d'abscisse x , par la masse volumique $\rho(x, t)$, la pression $P(x, t)$ et la vitesse axiale $v_x = v(x, t)$. Le fluide est supposé non visqueux et la perturbation due à l'onde acoustique reste faible en valeur relative. En notant $p(x, t) = P(x, t) - P_0$ la pression

acoustique et $\delta\rho(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0$ la variation de masse volumique induites par le passage de l'onde, montrer que l'équation régissant le mouvement du fluide se réduit à :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

2. Au repos, l'état du tuyau est caractérisé par l'aire $S_0(x)$ de sa section droite et on suppose $\left| \frac{dD}{dx} \right| \ll 1$. Sous l'action de la surpression p due au passage de l'onde, l'état du tuyau est alors décrit localement par l'aire $S(x, t)$ de la section droite d'abscisse x . On posera $\delta S(x, t) = S(x, t) - S_0(x)$.

a) Montrer que l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S v)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

b) Justifier le fait que la prise en compte de la variation de section le long du tuyau ne modifie pas l'équation précédente (1) régissant le mouvement du fluide.

c) La perturbation de l'état du tuyau créée par l'onde acoustique étant elle aussi supposée petite en valeur relative, montrer que l'équation de conservation de la masse se réduit, dans le cas d'un tuyau de section au repos S_0 à profil constant à :

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \rho_0 S_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

3. On introduit maintenant les relations élastiques du fluide $\rho = \rho(P)$ et du solide constituant le tuyau, de section S_0 constante au repos, $S = S(P)$.

a) Démontrer que l'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho_0 c^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dP} \Big|_{p=0} + \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dP} \Big|_{p=0}$$

b) Donner la signification physique de chacun des deux termes contribuant à la vitesse de propagation c de l'onde acoustique.

c) Pour chacun des cas apparaissant dans le tableau suivant, préciser si la vitesse de propagation est contrôlée par les propriétés du fluide, du solide ou des deux.

Propagation contrôlée par :	$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dP} \Big _{p=0}$ Eau $5 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$	$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dP} \Big _{p=0}$ Air $9 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$
$\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dP} \Big _{p=0}$ Laiton $3 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$	(α)	(β)
$\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dP} \Big _{p=0}$ Plastique souple $4 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$	(γ)	(δ)

Les valeurs du coefficient $\frac{1}{S} \frac{dS}{dP} \Big|_{p=0}$ correspondent à des tubes de dimensions analogues à celles d'un instrument à vent. Dans le cadre de cette modélisation, que peut-on en conclure sur l'influence des parois de l'instrument de musique sur le son qu'il émet ?

Deuxième partie

Notes émises par un instrument à vent

1. Conditions aux limites

Un tuyau sonore peut être le siège d'ondes acoustiques stationnaires qui vont dépendre fortement des conditions aux limites imposées à ses deux extrémités. Afin de préciser ces dernières, considérons un tuyau composé de deux parties cylindriques de diamètres respectifs Φ_1 et Φ_2 raccordés par une discontinuité brutale de section située à l'origine du référentiel. On désigne par ρ_0 la masse volumique du fluide au repos et par c la vitesse de propagation. Soit p_I l'amplitude de la surpression créée par une onde se propageant le long du tuyau dans le sens des x positifs ; la discontinuité génère deux ondes supposées planes : une onde réfléchie d'amplitude de surpression p_R et une onde transmise d'amplitude de surpression p_T .

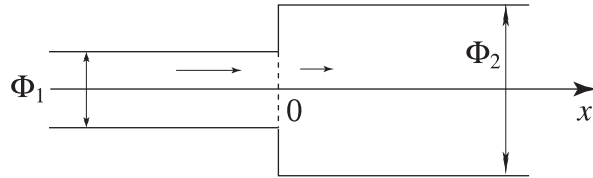


Figure 2

- a) Déterminer les expressions des coefficients de réflexion r et de transmission t relatifs aux amplitudes de pression en fonction du rapport $\chi = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs aux puissances acoustiques des ondes réfléchie et transmise.
- b) Tracer l'allure de la fonction $R(\chi)$ et préciser la signification physique de son minimum.
- c) A quelles conditions physiques correspondent les limites $\chi \rightarrow 0$ à Φ_1 donné et $\chi \rightarrow \infty$ à Φ_2 donné ? En déduire les conditions d'extrémité en termes de pression et de vitesse dans les deux cas.

2. Fréquences émises

Un instrument à vent peut être considéré comme un tuyau sonore de longueur L vérifiant à ses extrémités l'une ou l'autre des deux conditions aux limites : tuyau ouvert ou tuyau fermé. Il se comporte donc pour certaines fréquences comme un résonateur siège d'un système d'ondes stationnaires de longueur d'onde λ . Ces fréquences sont les modes propres de l'instrument et correspondent aux notes qu'il est capable de générer. Un jeu de conditions aux limites sera dit *pair* si les conditions aux deux extrémités sont de même nature (ouvert-ouvert ou fermé-fermé) et *impair* si les conditions aux deux extrémités sont de nature différente (ouvert-fermé).

- a) Montrer par un raisonnement physique simple que la note fondamentale, la note la plus basse générée par l'instrument, ne dépend que de la longueur L du tuyau, de la vitesse de propagation du son c et de la parité : donner l'expression de la fréquence correspondante.
- b) Pour les applications numériques suivantes, la vitesse du son dans l'air sera prise égale à 340 m s^{-1} . La flûte est un instrument considéré comme ouvert à ses deux extrémités. Déterminer la longueur de l'instrument pour que son fondamental soit la note *mi* de fréquence 330 Hz.

L'anche d'une clarinette est assimilée à une extrémité fermée. À longueurs égales, la clarinette joue-t-elle plus haut ou plus bas que la flûte ?

Le plus long tuyau d'un grand orgue mesure 10,6 m et émet une note fondamentale à 16 Hz. Déterminer la parité de son jeu de conditions aux limites.

c) Montrer que les notes harmoniques, de fréquence supérieure au fondamental, sont régulièrement espacées en fréquence et que l'écart entre deux harmoniques successifs est indépendant des conditions aux limites. Etablir l'expression de cet écart.

Troisième partie Influence du diamètre du tuyau

1. Lorsque l'instrumentiste joue des notes montant vers les aigus, donc des harmoniques de fréquence croissante, le rapport $\frac{\lambda}{D}$ décroît ; des ondes non-planes peuvent se propager ; le tuyau joue le rôle d'un guide d'onde et les ondes doivent maintenant satisfaire à l'équation de propagation d'onde tridimensionnelle :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

a) On s'intéresse au guidage sonore d'une onde monochromatique dans un tuyau d'orgue de section carrée de côté D . Justifier la forme :

$$p(x, y, z, t) = Y(y)Z(z) \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

sous laquelle on va rechercher la solution de l'équation d'onde.

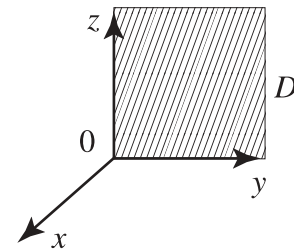


Figure 3

b) Quelle est la condition imposée à la vitesse du fluide aux parois ? En déduire les conditions imposées aux fonctions Y et Z .

c) Démontrer que la pulsation ω et le nombre d'onde k de l'onde sont liés à la dimension transversale D du tuyau par :

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\pi^2 c^2}{D^2} (a^2 + b^2) \quad a \text{ et } b \text{ étant des nombres entiers.}$$

Les répartitions de $Y(y)Z(z)$ de l'amplitude de la surpression dans la section droite sont appelées modes transverses du tuyau et caractérisées par les couples $\{a, b\}$. A quel couple correspond la propagation d'une onde plane ?

d) Exprimer la relation précédente sous la forme d'une fonction $\frac{\nu}{\nu_c} = f(\{a, b\}, kD)$ dans laquelle $\nu_c = \frac{c}{2D}$. Pourquoi appelle-t-on ν_c fréquence de coupure? Le tracé ci-contre représente les courbes des premiers modes $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{1, 1\}$, $\{0, 2\}$ et $\{2, 0\}$. Associer à chacune de ces courbes le mode correspondant.

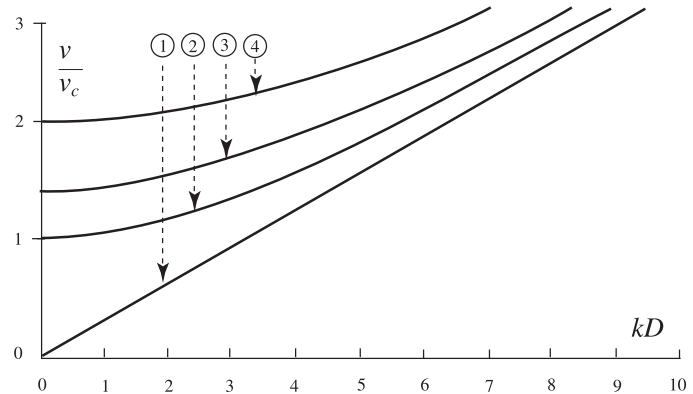


Figure 4

2. Un instrument à vent est dit *harmonieux* lorsque les notes correspondant aux divers harmoniques de son fondamental s'étagent régulièrement en fréquence. La richesse sonore de l'instrument se définit comme le nombre N de notes *harmonieuses* qu'il peut générer.

a) Démontrer que la condition d'harmonie est $\frac{d\nu}{dk} = \text{Cte}$. Quels sont les modes transverses autorisés pour un instrument *harmonieux*? Etablir la relation entre la fréquence ν_M de la note *harmonieuse* la plus élevée que peut jouer un instrument à vent et la fréquence de coupure ν_c de son tuyau.

b) Le diamètre D de la plupart des instruments à vent étant de l'ordre de 10 mm, calculer l'ordre de grandeur de la fréquence de la note *harmonieuse* la plus haute des instruments à vent. En déduire la justification du choix de D .

c) Exprimer la richesse N en fonction du rapport $\frac{L}{D}$ et de la parité des conditions aux limites. La richesse dépend-elle beaucoup des conditions aux limites? Calculer la richesse N d'un cor d'harmonie dont la longueur développée du tuyau est $L = 4$ m et la comparer à celle d'une flûte dont le tuyau est long de 50 cm.

Quatrième partie Rôle du pavillon

1. De nombreux instruments à vent, particulièrement dans la famille des cuivres, ont un tuyau de section circulaire de diamètre D qui se termine par un pavillon évasé dont le profil est proche d'une exponentielle.

a) Montrer qu'il faut rajouter à l'équation de propagation du son dans un tuyau de section constante le terme $\frac{1}{S_0} \frac{dS_0}{dx} \frac{\partial p}{\partial x}$ pour prendre en compte l'évolution de sa section. Ecrire cette équation dans le cas d'un pavillon de profil exponentiel défini par $D(x) = D_0 \exp(\beta x)$.

b) Etablir l'expression de la surpression $p(x, t)$ de l'onde plane progressant dans le pavillon

et montrer que sa propagation dans le pavillon n'est possible que si sa fréquence ν est supérieure à une fréquence ν_P que l'on déterminera. Justifier la loi de variation de l'amplitude de la surpression p le long du pavillon. Donner l'expression du nombre d'onde K et tracer l'allure de la courbe donnant l'évolution du rapport $\frac{\nu}{\nu_P}$ en fonction du rapport K/β .

c) Le pavillon d'un cor d'harmonie de longueur $L_P = 1,5$ m présente un diamètre d'entrée $\varphi = 12$ mm et un diamètre de sortie $\Phi = 310$ mm. Calculer le paramètre β de son pavillon et la valeur de sa fréquence ν_P .

2. Un cor d'harmonie se compose d'un tuyau, considéré comme fermé à l'embouchure, de diamètre $\varphi = 12$ mm constant sur une longueur $L_C = 2,4$ m, et raccordé ensuite au pavillon.

a) Pour prendre en compte la non idéalité des conditions d'extrémité qui traduit le détail de l'écoulement de raccordement entre la sortie du pavillon et l'air environnant, on admettra que le milieu extérieur se comporte vis-à-vis de l'instrument comme un tuyau équivalent prolongeant le pavillon et de diamètre Φ' tel que sa section droite admette une aire de 1 m^2 . Calculer le coefficient de transmission relatif aux puissances acoustiques T d'un cor d'harmonie sans son pavillon puis celui T_P d'un cor d'harmonie avec son pavillon.

b) Etablir l'expression de l'intensité acoustique I d'une onde en fonction de l'amplitude de la surpression, de la masse volumique du fluide et de la célérité du son.

c) Pour une intensité acoustique émise I_{EdB} de 80 dB, l'intensité de référence étant de $1 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$, calculer l'amplitude de la surpression de l'onde incidente régnant dans le corps de l'instrument fonctionnant sans son pavillon. Est-elle compatible avec les hypothèses faites pour étudier les propriétés des instruments à vent ? On donne $\rho_0 = 1,20 \text{ kg m}^{-3}$.

d) Pour un instrument avec son pavillon, quelle est la partie de l'instrument « vue » par les notes graves de fréquence ν nettement inférieure à ν_P et celle « vue » par les notes aiguës de fréquence ν nettement supérieure à ν_P ? Quel est le sens de variation du nombre de notes émises et de leur intensité pour une augmentation du diamètre de sortie Φ du pavillon, toutes choses égales par ailleurs ? Quel est donc le rôle principal du pavillon ?

* *
*

Rapport de MM. Jean-Pierre KORB et Thierry LEHNER, correcteurs.

Le problème portait sur l'étude des principales propriétés sonores résultant de la géométrie des instruments à vent. La première partie traitait de la propagation des sons dans un tuyau dans le cadre d'un modèle théorique simple. Elle réclamait des calculs précis car toutes les formules importantes étaient données dans l'énoncé. Elle a été assez bien réussie dans l'ensemble. La deuxième partie étudiait le rôle de la longueur de l'instrument pour les notes émises. Cette partie très proche du cours a été assez bien traitée dans l'ensemble. La troisième partie étudiait l'influence du diamètre de l'instrument. Elle a été inégalement traitée surtout dans sa dernière partie. Enfin la quatrième partie traitait de l'influence du rôle du pavillon dans les cuivres. Cette partie s'est avérée très sélective.

La moyenne des candidats français est de 10,6 et l'écart type est de 3,3. La répartition des notes est la suivante :

$0 \leq N < 4$	2%
$4 \leq N < 8$	20%
$8 \leq N < 12$	43%
$12 \leq N < 16$	29%
$16 \leq N < 20$	6%

Seulement 4 candidats ont obtenu une note inférieure à 2/20. On note une hausse significative des résultats par rapport à ceux de l'année précédente. Les recommandations données les années précédentes continuent de porter leurs fruits. Rappelons que le problème doit permettre de sélectionner les candidats à la fois sur leur faculté de saisir rapidement la signification physique du problème et sur leur connaissance des éléments de base du cours.

On peut faire les commentaires généraux suivants. Comme toujours les questions restent au début de chaque partie très proches du cours avec des difficultés croissantes au fur et à mesure de l'énoncé. En particulier, cette année les résultats des premières questions étaient donnés dans l'énoncé, on demandait donc aux candidats d'argumenter leur démonstration et non de s'arranger pour retrouver le résultat escompté. L'habileté technique n'est pas suffisante pour réussir une telle épreuve, il faut privilégier la réflexion et l'analyse physique surtout pour la filière PC. Nous recommandons encore une fois de vérifier l'homogénéité des formules et de discuter les ordres de grandeur dans les applications numériques. De plus il ne faut pas oublier les unités. Le problème faisant appel à des notions musicales, certains candidats ont su apporter des éléments originaux pour illustrer leurs réponses.

Partie I

Dans cette partie très proche d'une question de cours, on étudiait la propagation d'une onde acoustique monochromatique dans un tuyau dans le cadre d'un modèle théorique simple d'ondes planes.

1. Cette question proche du cours a été très bien traitée dans l'ensemble. Il n'y avait aucune difficulté puisque le résultat était donné dans l'énoncé et que le fluide était considéré comme non visqueux.

2a) Il n'y avait aucune difficulté non plus dans cette question puisque l'énoncé donnait la réponse. Le bilan de masse entre deux sections voisines permettait rapidement d'accéder au résultat. Presque tous les candidats sont arrivés à retrouver l'équation de la conservation de la masse.

2b) Cette question sans difficulté a été traitée un peu superficiellement. On attendait des commentaires justifiant le fait que le changement de section n'affecte pas la conservation de l'impulsion et donc l'équation du mouvement trouvée à la **1ère** question.

2c) Cette question était également évidente puisque l'énoncé donnait le résultat. Les candidats ont bien réussi cette question en négligeant les effets non linéaires venant des variations de ρ et de S le long de l'axe Ox . Une démonstration utilisant les développements limités au premier ordre était attendue et non pas une vague phrase de justification.

3a) Cette question technique ne présentait pas de difficulté pour des candidats connaissant bien leur cours. Les équations d'état du fluide et du solide étant indépendantes du temps, il n'y avait pas de réelles difficultés à trouver la méthode à employer. Le correcteur a fait néanmoins très attention à la rédaction des solutions proposées et aux diverses étapes des calculs intermédiaires.

3b) Cette question de signification physique s'est avérée plus sélective que prévue car beaucoup de candidats ignorent ce qu'est un coefficient de compressibilité d'un fluide ou celui affectant les propriétés d'élasticité du solide.

3c) Presque tous les candidats ont su répondre à cette application numérique. Par contre un grand nombre n'a pas compris le sens de la dernière question sur l'influence des parois d'un instrument à vent dans le cadre de cette modélisation.

Partie II

Cette partie permettait d'étudier le rôle de la longueur de l'instrument pour les notes émises. L'interprétation physique des phénomènes était ici essentielle pour justifier les solutions trouvées.

1a) Beaucoup de candidats ont su écrire la continuité de la pression en $x = 0$, mais un trop grand nombre s'est trompé sur la continuité du débit massique, notamment sur l'influence de la surface.

1b) Pas trop de problèmes dans cette question où l'on demandait de tracer l'allure de la fonction $R(\chi)$. Lorsqu'on demande de tracer l'allure, il s'agit de donner l'essentiel du graphe, notamment la position du minimum, l'ordonnée à l'origine et l'asymptote. Beaucoup ont oublié d'indiquer l'asymptote. Presque tous ont su préciser la signification physique du minimum.

1c) Les limites $\chi \rightarrow 0$ et ∞ , ont été bien discutées dans l'ensemble. Il faut néanmoins répondre à toutes les questions posées, notamment sur les conditions d'extrémité en termes de pression et de vitesse dans les deux cas.

2a) Cette question a été bien traitée dans l'ensemble. Beaucoup ont utilisé d'un petit schéma illustratif dans les cas des conditions aux limites pair et impair. Ceci les a aidé à trouver les solutions cherchées.

2b) Cette application numérique a été correctement trouvée par ceux qui avaient su faire la question précédente. La valeur trouvée (51 cm) permettait aux candidats de se rendre compte immédiatement de l'exactitude de leur raisonnement. La question de comparaison avec la clarinette de longueur égale demandait d'être illustrée par un petit calcul. Il n'était pas suffisant de se servir de ses notions musicales pour répondre à cette question. Il en est de même pour le jeu de parité de l'orgue. Une réponse à pile ou face n'était pas suffisante.

2c) Cette question a été bien traitée par ceux qui ne s'étaient pas trompés aux questions précédentes.

Partie III

1a) Pas de difficultés rencontrées pour justifier la forme de la solution proposée dans l'énoncé.

1b) Cette question s'est avérée très sélective. Très peu ont vu que l'annulation de la composante normale de la vitesse sur les parois impliquait l'annulation des composantes correspondantes des gradients de pression.

1c) Ceux qui avaient fait des erreurs de phase sur les fonctions Y et Z à la question précédente n'étaient pas trop handicapés sur cette question.

1d) La relation cherchée a été trouvée par presque tout le monde. La notion de fréquence de coupure n'a pas été suffisamment précisée. L'association des modes correspondant aux quatre courbes de la figure a été très bien traitée.

2a) Cette question a été assez sélective car la condition d'harmonie n'a pas été suffisamment précisée. La proportionnalité entre $\Delta\nu$ et Δk a été décrite par une minorité.

2b) Cette question d'ordre de grandeur a été négligée par les candidats.

2c) Seule une petite minorité a su traiter cette question sur la richesse N en fonction du rapport L/D . La comparaison avec le cor d'harmonie a été escamotée.

Partie IV

Cette partie plus technique traitait de l'influence du pavillon. Cette partie a été très sélective probablement par manque de temps.

1a) Comme toujours lorsque la solution est proposée, il a fallu regarder dans les détails les bonnes rédactions. On attendait ici une vraie démonstration et non pas le simple ajout du terme proposé dans l'énoncé dans l'équation de propagation de la première partie. On a noté également beaucoup d'erreurs de signe. L'écriture de cette équation dans le cadre d'un profil exponentiel s'est avérée plus difficile que prévu.

1b) Cette question a été mieux traitée que les autres. L'amortissement exponentiel a été perçu par certains et l'allure de la courbe proposée était correct pour ceux qui avaient abordé cette question.

1c) Cette question était facile et a été trouvée par presque tout le monde. Attention néanmoins aux unités.

2a) Un certain nombre de candidats ont su montrer que $T_P \gg T$, justifiant ainsi un des intérêts du pavillon.

2b) Certains candidats sont arrivés à deviner le résultat en se souvenant de leur cours.

2c) La discussion est restée ici très qualitative. Beaucoup ne connaissent pas l'échelle des décibels.

2d) Cette question très physique n'a pratiquement pas été abordée.

En conclusion, ce problème de concours, bien dans l'esprit de la filière PC, a permis de sélectionner de manière satisfaisante les candidats sur leur aptitude à saisir rapidement les effets physiques décrits dans l'énoncé.