

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2001

FILIÈRE **PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Les polynômes de Legendre, fonctions de Legendre et harmoniques sphériques étudiés dans ce problème ont des applications à la détermination des équilibres de température et des distributions de charges électriques, ainsi qu'à la mécanique quantique.

Les fonctions considérées sont à valeurs dans \mathbf{R} . On identifie une fonction polynomiale avec le polynôme associé.

Première partie

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère la fonction polynomiale P_n , définie par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

pour $x \in \mathbf{R}$. Il résulte des conventions habituelles que $P_0(x) = 1$ pour $x \in \mathbf{R}$.

1.a) Montrer que le polynôme P_n est de degré n . Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?

b) Pour quelles valeurs de n la fonction P_n est-elle paire ? impaire ?

c) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

2. Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq m \leq n - 1$,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = 0 .$$

3. On désigne par \mathcal{E} l'espace préhilbertien réel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ muni du produit scalaire

$$(u | v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx ,$$

pour $u, v \in \mathcal{E}$.

a) La famille $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle une famille orthogonale dans \mathcal{E} ?

b) Calculer $(P_n | P_n)$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$.

4.a) Soit $n \geq 1$. Montrer que $\frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right)$ est orthogonal à x^m pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq m \leq n - 1$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0 .$$

Deuxième partie

5. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq m \leq n$. On pose

$$f_{n,m}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}(x)$$

pour $x \in [-1, 1]$.

a) Etudier la parité des fonctions $f_{n,m}$ suivant les valeurs de n et m .

b) Montrer que $f_{n,m} \in \mathcal{E}$ et que, si $n' \in \mathbf{N}$, $n' \neq n$ et $0 \leq m \leq n'$, alors $f_{n,m}$ et $f_{n',m}$ sont orthogonales dans \mathcal{E} .

Dans la quatrième partie, on utilisera la propriété suivante, que l'on admettra : sur l'intervalle $] - 1, 1[$, la fonction $f_{n,m}$ est de classe \mathcal{C}^2 et est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) y = 0 .$$

Troisième partie

On désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées canoniques de \mathbf{R}^3 . Par définition une *fonction polynomiale* (ou *polynôme*) *homogène* sur \mathbf{R}^3 de degré N , où $N \in \mathbf{N}$, est une combinaison linéaire à coefficients réels de monômes $(x_1)^{i_1}(x_2)^{i_2}(x_3)^{i_3}$, où $i_1, i_2, i_3 \in \mathbf{N}$ et $i_1 + i_2 + i_3 = N$. On convient que la fonction nulle est un polynôme homogène de degré N pour tout $N \in \mathbf{N}$.

6.a) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}^3 , nulle en 0, dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$ sont des fonctions polynomiales homogènes sur \mathbf{R}^3 de degré N . Montrer que f est une fonction polynomiale homogène de degré $N + 1$.

b) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^N sur \mathbf{R}^3 qui vérifie

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^N f(x_1, x_2, x_3)$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que f est une fonction polynomiale homogène sur \mathbf{R}^3 de degré N .

7. Montrer que, si f est une fonction polynomiale homogène sur \mathbf{R}^3 de degré N ,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = N f .$$

8. On désigne par \mathcal{F}_N l'espace vectoriel des polynômes homogènes sur \mathbf{R}^3 de degré N . Trouver la dimension de \mathcal{F}_N .

9. Soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ le laplacien sur les fonctions sur \mathbf{R}^3 . Une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R}^3 telle que $\Delta f = 0$ est appelée *harmonique*. Soit

$$\mathcal{H}_N = \{f \in \mathcal{F}_N \mid \Delta f = 0\}$$

l'espace vectoriel réel des polynômes homogènes harmoniques sur \mathbf{R}^3 de degré N . On se propose de déterminer la dimension de \mathcal{H}_N , $\dim \mathcal{H}_N$.

a) Montrer que, pour $N \geq 2$, $\Delta(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_{N-2}$. En déduire que

$$\dim \mathcal{H}_N \geq 2N + 1 .$$

b) On pose $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Soit $k \in \mathbf{N}$, $0 \leq 2k \leq N$, et soit $g \in \mathcal{F}_{N-2k}$. Calculer $\Delta(r^{2k}g)$ en fonction de $g, \Delta g, r, N, k$.

10. Soit $f \in \mathcal{H}_N$, $N \geq 2$. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{F}_{N-2}$ tel que $f = r^2 g$.

a) Montrer qu'il existe une fonction h de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R}^3 telle que $f = r^{2K} h$, où K est la partie entière de $\frac{N+2}{2}$.

b) Montrer que $f = 0$.

11.a) Montrer que, si $N \geq 2$, $\dim \mathcal{H}_N \leq \dim \mathcal{F}_N - \dim \mathcal{F}_{N-2}$.

b) Quelle est la valeur de $\dim \mathcal{H}_N$?

Quatrième partie

On conserve les notations de la troisième partie. On introduit les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sur \mathbf{R}^3 définies par

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

pour $r \in]0, +\infty[$, $\theta \in]0, \pi[$, $\varphi \in]0, 2\pi[$. On négligera le fait que ces coordonnées ne sont pas définies pour les points d'un demi-plan de \mathbf{R}^3 . On écrira

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tilde{f}(r, \theta, \varphi)$$

(expression de f en coordonnées sphériques). Soit

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

la sphère de centre 0 et de rayon 1. On pose

$$\Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cotan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

et l'on admettra que

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S$$

est l'expression du laplacien en coordonnées sphériques, c'est-à-dire que

$$\widetilde{\Delta}(f) = \tilde{\Delta}(\tilde{f}).$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}$. On considère les fonctions sur S définies par

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq n & , & Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \cos(m\varphi) f_{n,m}(\cos \theta) \\ 0 < m \leq n & , & Y_{n,-m}(\theta, \varphi) = \sin(m\varphi) f_{n,m}(\cos \theta) \end{cases}$$

où les $f_{n,m}$ sont les fonctions étudiées dans la deuxième partie.

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}$ tel que $-n \leq m \leq n$,

$$\Delta_S Y_{n,m} = -n(n+1)Y_{n,m}.$$

13. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}$ tel que $-n \leq m \leq n$. Soit $H_{n,m}$ la fonction sur \mathbf{R}^3 telle que

$$\tilde{H}_{n,m}(r, \theta, \varphi) = r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi).$$

a) Montrer que $\tilde{\Delta} \tilde{H}_{n,m} = 0$.

b) Montrer, en regroupant dans $\tilde{H}_{n,m}$ les termes en $r \sin \theta \cos \varphi$, $r \sin \theta \sin \varphi$ et $r \cos \theta$, que $H_{n,m}$ est un polynôme homogène harmonique sur \mathbf{R}^3 de degré n .

* *

*

Rapport de MM. Vincent COSSART et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Cette épreuve de mathématiques a été très mal réussie. Le manque de familiarité manifeste avec l'univers des mathématiques oblige la plupart des candidats à mobiliser toutes leurs ressources intellectuelles et toute leur énergie pour traiter des problèmes réputés classiques et à se concentrer en priorité sur les questions calculatoires. En règle générale, l'aptitude des candidats à poursuivre jusqu'au bout un calcul qui ne donne pas immédiatement le résultat demandé a constitué l'un des critères de classement pour cette épreuve.

Concrètement une proportion significative des élèves de l'École Polytechnique aura été reçue au concours sans savoir ce qu'est une fonction de plusieurs variables, ce qu'est un polynôme homogène et que le laplacien fait baisser le degré total d'un polynôme de 2.

La moyenne de l'épreuve est de 8,7, l'écart-type est de 4,2. Les notes attribuées vont de 1 à 20 inclus.

Une vingtaine de candidats a obtenu la note 20, ce qui signifie soit qu'ils ont traité le problème jusqu'à la question **7**, soit qu'ils ont « limité les dégâts » sur les 5 premières questions et ont bien traité le problème à partir de la question **6.a**. Ces meilleures copies sont très dissemblables.

La question **6.a** a été le tournant de l'épreuve. Certains se sont arrêtés là, d'autres ont continué mais ont perdu toute lucidité (voir plus loin **8**), d'autres enfin ont eu un deuxième souffle et ont bien travaillé à partir de cette question.

Il s'agissait d'un problème classique sur les polynômes de Legendre.

Examinons en détail les questions

Certains ont traité les questions **1.c**, **2**, **3.b**, et **4.a** en abusant de la formule du binôme, obtenant des résultats fort longs, compliqués et étonnamment variés puis affirmant ensuite avec autorité que « donc $P_n(1) = 1$ » ou « $(P_n|P_n) = \frac{2}{2n+1}$ ». Ils ont eu invariablement la note 0 à ces questions, même si la formule affreuse trouvée était juste.

1.a, **1.b**, **1.c** Ont été en général bien traitées.

Les choses sérieuses commençaient avec la question **2** où les intégrations par parties ont découragé plus d'un. Certains candidats remarquent à juste titre que l'intégrale entre -1 et 1 d'une fonction impaire est toujours nulle ; certains d'entre eux, emportés par leur élan, étendent cette propriété de nullité à toute fonction paire.

3.a A été bien traitée sauf par des étourdis. Relevons cette curieuse assertion, rencontrée à plusieurs reprises : « $(P_n|P_n) \neq 0$, donc la famille n'est pas orthogonale » ! Ou encore : « la base canonique est orthonormée ».

3.b Fut un calvaire pour beaucoup. Accordons une mention particulière au résultat trop fréquent $(P_n|P_n) = 0$. Le calcul de l'intégrale de Wallis $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ semble hors de portée de la quasi-totalité des candidats.

4.a A été bien traitée par une grande majorité. Notons toutefois une certaine propension à développer l'expression $\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right)$ **avant** de l'intégrer par parties entre -1 et 1 , ce qui introduisait des termes de bord voués à s'éliminer mutuellement au terme d'une demi-page de calculs qu'on aurait pu éviter.

Notons également, pour les candidats qui ont conservé la forme initiale, que la nullité des termes de bord devait être justifiée, sans quoi la question n'a pas été considérée comme correctement résolue. La remarque vaut également pour les questions **2** et **5.b**.

4.b Pratiquement tout le monde a oublié le cas $n = 0$. Peu ont fait cette question. Certains ont cru pouvoir affirmer que $(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x)$ était nul pour la seule raison que son intégrale sur $[-1, 1]$ était nulle.

Ceux qui l'ont traitée ont vu en général que **4.a** impliquait que P_n et $(x^2-1)P_n'' + 2xP_n'$ étaient proportionnels et ont calculé les coefficients dominants. D'autres ont calculé les coefficients de P_n et ont « bêtement » vérifié que P_n était solution de l'équation différentielle. Certains ont trouvé le simplissime argument suivant : soit $u_n(x) := (x^2-1)^n$, u_n est solution de l'équation différentielle $(x^2-1)y' - 2nxy = 0$, je dérive n fois cette équation et je trouve une équation vérifiée par la dérivée n -ème de u_n : c'est celle de l'énoncé. Certains ayant utilisé un des deux arguments originaux ont déduit **4.a** de **4.b**, pourquoi pas ?

5.a A été bien traitée sauf par des étourdis qui ont écrit les choses les plus ahurissantes. Par exemple, que $(1-x^2)^{m/2}$ avait la parité de m .

5.b Contrairement à beaucoup d'affirmations, $f_{n,m}$ n'est pas toujours un polynôme, n'est pas toujours C^∞ , et n'est pas définie sur \mathbf{R} . Les deux intégrations par parties nécessaires pour justifier l'orthonormalité ont fait souffrir la plupart des candidats.

6.a A été bien traitée dans des copies médiocres et sabotée dans de bonnes copies. Beaucoup ont voulu se ramener au cas d'un monôme « par linéarité ». Cet argument devait être sérieusement justifié, on devait au moins citer l'hypothèse $f(0,0,0) = 0$. Les correcteurs ont lu avec consternation les formulations les plus sidérantes pour l'expression générale d'un polynôme homogène. Ne parlons pas de « formules d'intégration » abracadabrantesques, à commencer par des expressions erronées pour la primitive de x^i .

6.b La petite minorité qui a bien fait cette question l'a faite par récurrence sur N en se servant de **6.a**, certains ont mal contrôlé la continuité, d'autres ont oublié de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0,0) = 0$.

7. Fut assez bien traitée. Beaucoup de candidats ont eu des problèmes dans le maniement

des Σ et, par exemple, ont sorti le coefficient du monôme générique de la Σ , ce qui rendait leur formule fausse...

8. Les correcteurs ont eu l'impression que certains candidats étaient devenus fous. On a lu dans des copies qui ne se voulaient pas comiques : $\dim \mathcal{F}_N = \frac{N}{2}$, $\dim \mathcal{F}_N = \frac{N}{2}!$, $\dim \mathcal{F}_N = N^2 - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ (toujours ≤ 0) et enfin l'ahurissant $\dim \mathcal{F}_N = e^{-N} \left(\frac{1 - e^{N+1}}{1 - e} \right)$.

9.a. Pour bien la traiter, il fallait avoir **8**.

9.b Les correcteurs ont trouvé les formules les plus farfelues, la plupart ne tenant pas compte de l'homogénéité. On a trop souvent lu $\Delta(r^{2k}g) = \Delta(r^{2k})g + r^{2k}\Delta(g)$.

10.a 10.b. Quelques bons candidats ont traité ces deux questions d'un seul jet, certains ont fait remarquer, avec raison, que la fonction h était en fait un polynôme.

11.a 11.b. Il fallait avoir **8** pour bien traiter ces questions. Beaucoup ont omis de signaler que l'application $\mathcal{F}_{N-2} \rightarrow \mathcal{F}_N, g \rightarrow r^2g$ était linéaire. Enfin on a lu les horreurs habituelles : « le » supplémentaire, « le supplémentaire est le complémentaire », etc.

12 et 13.a. Il y avait là des points faciles que beaucoup sont allés chercher.

13.b. Il y avait 4 cas à considérer suivant le signe et la parité de m . Un candidat a traité un des cas : il a été très bien récompensé. Un autre a énoncé les 4 cas et, pris par le temps, a essayé de les traiter en bloc : il n'a pas convaincu les correcteurs, mais il a eu 20 quand même.