ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2000 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On se propose d'étudier une famille de polynômes (polynômes de Krawtchouk) et une famille de matrices (matrices d'adjacence du schéma d'association de Hamming) dont les propriétés sont liées, et applicables à la théorie des codes détecteurs et correcteurs d'erreurs dans la transmission de l'information. (Ces applications ne sont pas abordées dans le problème.)

Les deux premières parties sont indépendantes.

⋆⋆⋆

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel non nul.

On prend par convention $0! = 1$. Si n et k sont des entiers naturels, on pose

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Première partie

1. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit le polynôme φ_k de la variable X par

$$\varphi_k(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{0 \leq i \leq k-1} (X-i) & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ .} \end{cases}$$

Évaluer $\varphi_k(j)$ pour chaque entier naturel j.

2. Pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N$, on définit le polynôme P_n de la variable X par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \varphi_k(X)\, \varphi_{n-k}(N-X)\ .$$

a) Calculer P_0, P_1 et P_2.

b) Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

c) Montrer que, pour chaque entier j tel que $0 \leq j \leq N$,

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k}\ .$$

3. Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq N$, on considère la fonction f_j de la variable réelle u, définie par

$$f_j(u) = \sum_{n=0}^{N} P_n(j) u^n\ .$$

Montrer que $f_j(u) = (1-u)^j (1+u)^{N-j}$.

4. On considère la fonction F de deux variables réelles u et v, définie par

$$F(u,v) = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v)\ .$$

a) Montrer que $F(u,v) = \alpha(1+uv)^\beta$, où α et β sont des constantes que l'on déterminera.

b) Soient a et b des entiers, $0 \leq a \leq N$, $0 \leq b \leq N$. Montrer que si $a \neq b$:

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = 0\ .$$

Évaluer $\dfrac{\partial^{2a} F}{\partial u^a \partial v^a}(0,0)$ en fonction de a et de N.

5. On note $\mathbf{R}_N[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. Pour P, $Q \in \mathbf{R}_N[X]$, on pose

$$< P|Q >= \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P(j)Q(j)\ .$$

a) Montrer que $< \ | \ >$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_N[X]$.

b) Montrer que $(P_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_N[X]$ muni de ce produit scalaire.

6. Montrer que, pour tout entier m tel que $1 \leq m \leq N-1$,

$$(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X) = 0 \ .$$

[On calculera de deux manières différentes le coefficient de u^m dans $(1-u^2)\dfrac{df_j(u)}{du}$.]

Deuxième partie

On pose $E = \{1, 2, \dots, N\}$ et l'on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour chaque partie I de E, on note $\operatorname{Card} I$ le cardinal de I. Si I et J sont des parties de E, on pose

$$d(I,J) = \operatorname{Card}(I \bigtriangleup J) \ ,$$

où $I \bigtriangleup J$ est l'ensemble des points de la réunion $I \cup J$ qui n'appartiennent pas à l'intersection $I \cap J$.

7.a) À quelle condition a-t-on $d(I,J) = 0$? À quelle condition a-t-on $d(I,J) = 1$?

b) Montrer que $d(I \bigtriangleup J, I) = \operatorname{Card} J$.

8. Soient I et J deux parties de E. On pose $d(I,J) = k$. Calculer le nombre γ_j^k de parties A de E telles que $d(I,A) = 1$ et $d(J,A) = j$.

Troisième partie

On utilise dans cette partie les notations et les résultats des deux premières parties.

On suppose $\mathcal{P}(E)$ muni d'un ordre total $\preceq$. On a donc $\mathcal{P}(E) = \{I_1, I_2, \dots, I_{2^N}\}$ où $I_1 \preceq I_2 \preceq \dots \preceq I_{2^N}$.

Pour tout entier naturel n, on définit une matrice carrée réelle à 2^N lignes

$$A_n = \left((A_n)_{pq}\right)_{\substack{1 \leq p \leq 2^N \\ 1 \leq q \leq 2^N}} \quad \text{par}$$

$$(A_n)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(I_p, I_q) = n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

On note $\mathcal{J}$ la matrice identité à 2^N lignes.

9.a) Que vaut A_n pour $n > N$? Expliciter A_0.

b) Montrer que pour tout entier m tel que $1 \leq m \leq N-1$,

$$A_1 A_m = (N-m+1)A_{m-1} + (m+1)A_{m+1} \ .$$

10. On pose $A = \frac{1}{2}(N\mathcal{J} - A_1)$. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n tel que $0 \le n \le N$,

$$A_n = P_n(A)\ ,$$

où les polynômes P_n sont ceux définis et étudiés dans la première partie.

11. Soit i un entier tel que $0 \le i \le N$. Montrer que, si $I \in \mathcal{P}(E)$ est tel que $\operatorname{Card} I = i$, alors pour tout entier j tel que $0 \le j \le N$,

$$P_j(i) = \sum_{\substack{J\in\mathcal{P}(E)\\ \operatorname{Card} J = j}} (-1)^{\operatorname{Card}(I\cap J)}\ .$$

12.a) Soient I, J, $K \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(-1)^{\operatorname{Card}\big((I\triangle J)\cap K\big)} = (-1)^{\operatorname{Card}(I\cap K)}(-1)^{\operatorname{Card}(J\cap K)}\ .$$

b) Soient I, $J \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\sum_{K\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{\operatorname{Card}(I\cap K)}(-1)^{\operatorname{Card}(J\cap K)} = \begin{cases} 2^N & \text{si } I = J \\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

13. Pour tout entier k tel que $0 \le k \le N$, on pose

$$B_k = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N} P_k(n)A_n\ .$$

a) Montrer que

$$\begin{cases} (B_k)^2 = B_k \\ B_kB_\ell = 0 \quad \text{si } \ell \ne k\ .\end{cases}$$

[On pourra utiliser les résultats des questions **11.** et **12.**].

b) Déterminer la trace et le rang de chaque matrice B_k.

14.a) Pour chaque entier n tel que $0 \le n \le N$, trouver les valeurs propres de la matrice A_n.

b) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de la matrice A_1.

* *
*

Rapport de MM. Vincent COSSART et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Le problème comportait des questions réellement difficiles, mais il était suffisamment long pour que les candidats le traitent « à la carte », en se rattrapant par exemple sur les problèmes de dénombrement des seconde et troisième parties s'ils étaient arrêtés par les calculs d'analyse de la première partie. D'où un écart-type faible de $3,2$ et des notes relativement concentrées autour d'une moyenne de l'ordre de $9,6$ avec très peu de notes au dessus de 17 et **trois** copies seulement atteignant la note 20.

Parmi les remarques générales, notons une propension à proposer systématiquement des raisonnements par récurrence là où ils s'avèrent inadéquats (questions **2.b, 3, 6, 9.b**, etc.) tandis que la seule récurrence exigée par l'esprit du problème, à la question **10**, est traitée de façon décevante.

Signalons également une inattention à la distinction graphique entre un petit n et un grand N, bien que les deux symboles soient présents dans le problème, et souvent dans une même question, avec une signification distincte.

Analyse des questions

1. Correctement traitée en général, mais parfois avec une certaine paresse, les candidats refusant de considérer tous les cas particuliers. Ceux qui remarquaient que la formule $\binom{j}{k}$ recouvrait tous les cas étaient à même de traiter la question **2.c** en deux lignes.

2. Seule la question **2.b** appelle des commentaires. Tout d'abord, une somme de polynômes de degré n n'est pas nécessairement un polynôme de degré n : il fallait d'abord vérifier que le coefficient dominant était non nul. Ensuite, trop de candidats laissent brute, sans la calculer, la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; la connaissance de ce type de résultat élémentaire aurait pourtant évité à ceux qui ont fait une faute de signe d'affirmer que les sommes $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ ou $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$ n'étaient pas nulles.

3. Si la plupart des candidats trouvent la méthode, bien peu accordent une importance suffisante à la délimitation correcte des domaines de sommation, qui était pourtant la seule difficulté.

4. La question **4.a** est traitée parfaitement jusqu'au résultat intermédiaire $(2+2uv)^N$, qu'il fallait mettre sous la forme $\alpha(1+uv)^\beta$. La moitié des copies donne le résultat correct $\alpha = 2^N$. Les autres proposent des valeurs diverses pour α, les favorites étant $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = \frac{1}{2^N}$ et $\alpha = \sqrt[N]{2}$.

Dans la question **4.b**, beaucoup de candidats ont utilisé la formule de Leibniz en se focalisant sur le seul terme qui donnait la réponse après la substitution $u = v = 0$, obtenant ainsi le résultat sans l'avoir réellement justifié.

Outre les réponses du type « on voit bien qu'il y aura toujours un u ou un v en facteur » sans autre commentaire, l'erreur la plus fréquemment commise, lorsque la formule de Leibniz est bien écrite, est d'oublier que la dérivée k-ième de la fonction $u \to u^a$ n'est égale à un multiple de $u \to u^{a-k}$ que lorsque k est inférieur ou égal à a : l'oublier introduisait une division par zéro en $u = 0$.

On relève aussi très souvent des formules de dérivation fausses pour la dérivée b-ième d'un produit de deux fonctions.

5. Dans la question **5.a**, la surprise est venue du fait que des quatre propriétés d'un produit scalaire : forme bilinéaire, symétrique définie positive, c'est la première, c'est-à-dire la bilinéarité, qui donne le plus lieu à erreur, beaucoup de candidats se contentant de vérifier simplement l'homogénéité par rapport à la multiplication par un scalaire, et d'autres au contraire l'oubliant pour ne vérifier que son caractère de morphisme de groupe additif.

La positivité a parfois donné lieu à des formulations sidérantes.

La question **5.b** n'est pas très souvent traitée ; parmi les candidats qui ont deviné la méthode, certains écrivent mal la relation qui lie le coefficient a_{mn} d'un polynôme des deux variables u et v, à sa dérivée $\frac{\partial^{n+m}}{\partial u^m \partial v^n}$ prise en $(0, 0)$.

6. Plus de candidats qu'on ne l'aurait attendu savent tirer parti de l'indication donnée par l'énoncé, et obtiennent la relation demandée avec les entiers de 0 à N à la place de l'indéterminée X. A ce point, certains semblent pris de timidité et n'arrivent pas à conclure, alors que dans la question précédente (**5.a**), le fait qu'un polynôme de degré N soit déterminé par ses valeurs en $N + 1$ points semblait parfaitement assimilé, d'autres ont raconté des horreurs du type : « une fonction $\mathcal{C}^\infty$ s'annulant sur N entiers consécutifs est nulle ».

7. La partie **7.b**, plus difficile, est souvent mieux traitée ou en tout cas mieux rédigée que la partie **7.a**, où les résultats sont plus souvent faux, ou bien devinés sans preuve, avec très souvent une confusion soutenue entre condition nécessaire et condition suffisante.

8. Cette question n'est résolue que dans quelques copies. Un ou deux candidats sont parvenus à reconstituer les valeurs des γ_j^k à partir de la formule proposée en **9.b**.

9. La question **9.a**, élémentaire, est en général correctement traitée, mais là encore beaucoup d'affirmations sans preuve.

La résolution de **9.b** exigeait le calcul préalable des γ_j^k de la question **8**, ce dont beaucoup se sont vite aperçu pour renoncer.

10. Cette question est abordée par presque tous les candidats qui ont vu d'emblée qu'il s'agissait d'un corollaire simple des résultats **6** et **9.b**. Toutefois, la récurrence est trop souvent mal conduite, car même la majorité des candidats qui s'aperçoivent qu'elle porte sur deux indices proposent en général une récurrence cumulée sans prendre le soin de l'initialiser pour les *deux* premiers indices.

11. Cette question, qui n'était pas si difficile en tenant compte de **2.c**, n'est réussie que par un petit nombre de candidats.

12. Le calcul du **12.a** est réussi par un bon quart des candidats. Beaucoup d'autres prétendent démontrer la formule fausse $Card\Big((I\Delta J)\cap K)\Big) = Card(I\cap K)+Card(J\cap K)$.

Dans le **12.b**, le cas $I = J$ est évidemment bien plus souvent résolu que le cas $I \neq J$. Pour ce dernier, on essaie des raisonnements heuristiques du type « Le nombre de termes à sommer étant pair, il y aura autant de 1 que de -1 ».

13. **13.a**, souvent abordé, n'est pour ainsi dire jamais résolu (à une ou deux exceptions près). **13.b** donne un peu plus souvent lieu à des réponses exactes ou partiellement exactes.

14. Cette question n'a jamais été traitée.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2000 FILIÈRE **PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Le but de ce problème est l'étude d'approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux extrémités de l'intervalle de définition.

Première partie

Soit n un entier fixé, $n \geq 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes, et I la matrice identité à n lignes. On note X_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, les coefficients d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On identifie un vecteur V de $\mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \ldots, v_n$ dans la base canonique, à la matrice colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$.

1. Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose

$$N(X) = \sup_{\substack{V \in \mathbf{R}^n \\ V \neq 0}} \left(\frac{\|XV\|}{\|V\|} \right) .$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que, pour toutes matrices X, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $N(XY) \leq N(X)\,N(Y)$.

Cette propriété est-elle vérifiée si l'on remplace la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(X) = \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |X_{ij}| \ ?$$

2. Soit $(X_p)_{p=1,2,\ldots}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $\lim\limits_{p \to +\infty} X_p = X$.

a) Montrer que, pour p assez grand, X_p est inversible.

b) Soit $V \in \mathbf{R}^n$. Montrer que, si X_p est inversible,

$$\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\| \leq N(X^{-1})N(X - X_p)\|X_p^{-1}V\| \ .$$

En déduire qu'il existe un entier p_0 et un nombre C indépendant de p tel que, pour $p \geq p_0$,

$$\|X_p^{-1}V\| \leq C\|X^{-1}V\| \ .$$

c) Montrer que $\lim_{p\to+\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0$.

3. On dit qu'une matrice $X = (X_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (P) si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} X_{ii} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n & (P_1) \\ X_{ij} \leq 0 & \text{pour tous } i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } i \neq j & (P_2) \\ \sum_{j=1}^n X_{ij} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \ . & (P_3) \end{cases}$$

Soit X une matrice qui possède la propriété (P) et soit $V \in \mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$.

a) Montrer que si $XV = 0$, alors $V = 0$. [On considérera i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$.]

b) On suppose que XV a toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer que V a toutes ses composantes positives ou nulles. [On considérera i_1 tel que $v_{i_1} = \min_{i=1,\dots,n} v_i$.]

4. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $X = \lim_{p\to+\infty} X_p$, où chaque X_p est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui possède la propriété (P). Montrer que les coefficients de la matrice inverse X^{-1} sont positifs ou nuls.

Deuxième partie

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$.

5.a) Montrer qu'il existe une unique fonction u de classe C^4 sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \ . \end{cases} \tag{1}$$

b) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.

c) On choisit pour f la fonction constante égale à 1. Déterminer la solution $\widehat{u}$ du problème (1) dans ce cas.

Soit n un entier, $n \geq 1$. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et l'on considère la subdivision $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n+1}$ de l'intervalle $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $x_{i+1} - x_i = h$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

6.a) Soit u une fonction à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \,,$$

où $u^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de u.

b) Que devient cette inégalité dans le cas où u est la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question **5.c)** ?

7. Soit $F \in \mathbf{R}^n$, de composantes $f_1, \ldots, f_n$. On désigne par U un vecteur de $\mathbf{R}^n$, de composantes $u_1, \ldots, u_n$ et l'on pose $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 0$.

a) Écrire sous forme matricielle $AU = F$ le système (2) linéaire en les inconnues $u_1, \ldots, u_n$:

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i \,, \quad 1 \leq i \leq n \,. \tag{2}$$

b) Montrer que, pour tout vecteur V de $\mathbf{R}^n$, le produit scalaire canonique $(AV|V)$ peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.

c) En déduire que la matrice A est inversible.

8.a) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de A. Montrer que les coefficients B_{ij} de B sont positifs ou nuls.

b) Soit $\widehat{F}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1. Déterminer les composantes de $B\widehat{F}$ à l'aide des valeurs de la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question **5.c)**. En déduire que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \leq \frac{1}{8} \,.$$

9. On suppose que $(u_1, \ldots, u_n)$ est la solution du système (2) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, et l'on désigne par $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ les valeurs prises en $x_1, \ldots, x_n$ par la solution u du problème (1).

a) Donner une majoration de $|u_i - u(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \ldots, n$, en fonction de h et de la fonction f''.

b) En quel sens peut-on dire que la solution du problème linéaire (2) avec $f_i = f(x_i)$ approxime la solution du problème (1) ?

c) On choisit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^4+5}}$.

Trouver une valeur de l'entier n qui assure $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$, pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Troisième partie

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ comme dans la deuxième partie. Pour tout entier $p \geq 1$, on considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{1}{p^2}u = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

10.a) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, il existe une unique fonction $u^{[p]}$ de classe C^4 sur $[0,1]$ qui est solution du problème (3).

b) Montrer que la suite de fonctions $(u^{[p]})_{p\geq 1}$ tend simplement, quand p tend vers $+\infty$, vers une fonction u de classe C^4 sur $[0,1]$, et que u est solution du problème (1) de la deuxième partie.

11. On choisit pour f la fonction constante égale à 1 et l'on note $\widehat{u}^{[p]}$ la solution du problème (3) dans ce cas.

a) Déterminer $\widehat{u}^{[p]}$.

b) Pour tout entier $p \geq 1$, étudier les variations de la fonction $x \in [0,1] \mapsto \widehat{u}^{[p]}(x) \in \mathbf{R}$.

c) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \widehat{u}^{[p]}(x) < \frac{1}{8}$.

12. On reprend les notations de la deuxième partie.

a) Montrer que pour chaque entier $p \geq 1$, le système linéaire

$$(A + \frac{1}{p^2}I)U = F \tag{4}$$

a une solution unique, notée $U^{[p]}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{p\to+\infty} U^{[p]}$?

b) Soit $(u_1^{[p]}, \dots, u_n^{[p]})$ la solution du système (4) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Donner une majoration de $|u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h, p, f et f''.

* *
*

Rapport de MM. Laurent HABSIEGER et Andrei MOROIANU, correcteurs.

Comme mentionné dans l'énoncé, le but de ce problème est d'étudier des approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux bords. Les méthodes utilisées font appel à de nombreux points du programme : équations différentielles, espaces vectoriels normés, calcul matriciel, formules de Taylor, approximations numériques ... La première partie détaille les outils d'algèbre linéaire nécessaires à l'étude de l'approximation des solutions de deux équations différentielles, traitées dans les deuxième et troisième parties respectivement.

La répartition des notes des candidats français est la suivante :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	4%
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	32%
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	35%
$12 \leq \mathrm{N} \leq 16$	19%
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	10%

Cette année, 8 copies (contre 27 l'année dernière et 6 l'année précédente) ont obtenu une note éliminatoire.

Le barème est toujours très généreux, même si la moyenne générale est légèrement inférieure à 10 (9,96 exactement pour les candidats français). Toutefois le premier correcteur a noté une légère amélioration du niveau des candidats. Il lui semble que la préparation des candidats s'adapte progressivement aux niveaux d'entrée en classes préparatoires et à l'École Polytechnique. Il espère que cette tendance persistera au cours des prochaines années.

Avant d'analyser plus avant les résultats des candidats, donnons les différents pourcentages de réussite pour chaque question.

Question	Très insuffisant	Très satisfaisant	Question	Très insuffisant	Très satisfaisant
1.a	08%	62%	**7**.b	24%	38%
1.b	35%	27%	**7**.c	54%	20%
2.a	55%	33%	**8**.a	65%	26%
2.b	37%	30%	**8**.b	54%	34%
2.c	47%	41%	**9**.a	67%	02%
3.a	64%	32%	**9**.b	80%	04%
3.b	68%	26%	**9**.c	86%	07%
4.	86%	09%	**10**.a	80%	03%
5.a	46%	18%	**10**.b	99%	00%
5.b	17%	68%	**11**.a	49%	36%
5.c	06%	89%	**11**.b	79%	15%
6.a	47%	36%	**11**.c	99%	00%
6.b	07%	60%	**12**.a	97%	02%
7.a	05%	91%	**12**.b	100%	00%

Précisons maintenant quelques remarques générales.

L'orthographe ne s'améliore pas mais il ne faut pas que les candidats restreignent leurs explications pour éviter de faire trop de fautes d'orthographe. Nous rappelons que toute assertion doit être justifiée.

Certains candidats s'imaginent qu'il suffit, à la fin d'une suite de calculs incohérents, de mettre bien en évidence le résultat demandé, pour gagner des points. Cette pratique, non seulement ne rapporte pas de points, mais en plus elle affecte l'impression générale que le correcteur se fait de la copie, et du même coup, la note finale accordée.

En règle générale, les candidats ont traité les questions dans l'ordre qui leur a été proposé. Ceci est la bonne manière de procéder, car faire trop souvent l'impasse sur les questions qui paraissent difficiles amène le candidat à perdre le contact avec le problème et du même coup à rater des questions faciles. Nous conseillons aux candidats de lire attentivement chaque question et de ne passer à la suivante qu'après quelques minutes de réflexion. Cependant, vers la fin du temps autorisé, il est toujours possible d'essayer de gagner des points avec d'éventuelles questions faciles de la dernière partie du problème.

Nous avons été surpris de voir un bon nombre de candidats qui manifestement ne connaissent pas le calcul matriciel (voir **2.b** ci-dessous).

Aussi, la méconnaissance de l'énoncé exact du théorème de Cauchy-Lipschitz a transformé deux questions faciles (**5.a** et **10.a**) en de véritables obstacles.

À l'inverse, des sujets plus délicats, comme par exemple la méthode de la variation des constantes ou la formule de Taylor à reste intégral, semblent être bien maîtrisés par beaucoup de candidats.

La présentation des copies reste correcte et nous recommandons toujours la lecture des rapports 1997 et 1998 pour avoir en détail quelques conseils pratiques.

Première partie

1.a) La plupart des candidats ont oublié de vérifier que l'application N était bien définie ; certains ont toutefois remarqué qu'elle prenait bien des valeurs positives ou nulles. Parmi les axiomes de définition d'une norme, l'axiome de séparation est celui qui a été le plus fréquemment oublié ou mal traité.

1.b) La première propriété a donné lieu principalement à deux types de fautes. Tout d'abord, un bon nombre de candidats ont cherché à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ensuite, parmi ceux qui ont pensé à multiplier et diviser par $\|YV\|$, beaucoup ne se sont pas préoccupés de savoir si ce terme était non nul.

La plupart des candidats ont su trouver un contre-exemple pour la norme infinie. Celui-ci était parfois inutilement compliqué.

2.a) Cette question a été très inégalement traitée. Certains candidats ont fait appel à des notions de topologie : les uns ont bien utilisé le fait que $GL_n(\mathbb{R})$ était un ouvert, d'autres ont cherché en vain à appliquer la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La majorité des candidats a remarqué que la continuité du déterminant permettait de conclure, mais la rédaction laissait parfois à désirer.

2.b) La première partie de la question a été en général mieux traitée que la seconde. Les fautes les plus graves consistaient à effectuer des multiplications fantaisistes ($(XV)(X^{-1}V) = V^2$ ou $N(X)\|X^{-1}V\| = \|V\|$). Là encore, certains candidats divisaient par des termes sans s'assurer qu'ils étaient non nuls. Dans la seconde partie de la question, beaucoup de candidats n'ont pas su appliquer l'inégalité triangulaire.

2.c) Certains candidats n'ont pas cherché à utiliser les questions précédentes et se sont contentés d'affirmer le résultat. Parmi les autres, certains ne se sont pas préoccupés de la dépendance en V, se contentant de montrer une convergence simple. Quelques-uns se sont basés sur la formule explicite de l'inverse d'une matrice à l'aide des cofacteurs et sur l'équivalence des normes pour montrer directement le résultat.

3. Beaucoup de candidats se sont lancés tête baissée dans les calculs, cherchant à démontrer le résultat à tout prix, quitte à modifier quelques inégalités au passage. Seul un petit nombre de candidats ont pu traiter de manière satisfaisante les deux sous-questions.

4. La plupart des candidats n'ont pas vu comment aborder cette question. Parmi les autres, certains ont pensé à introduire les vecteurs colonnes de la matrice X, sans pouvoir appliquer la sous-question précédente. Une autre faute courante consistait à affirmer que si la limite d'une suite de réels était positive ou nulle, cette suite était positive à partir d'un certain rang.

Deuxième partie

5.a) Cette question, proche d'une question de cours, fut une déception. Les candidats se sont le plus souvent contentés d'arguments heuristiques. Certains citent un théorème sans en préciser l'énoncé ni en vérifier les hypothèses, d'autres se contentent de remarquer que deux conditions suffisent à déterminer la fonction. Beaucoup ont confondu conditions initiales et conditions aux bords. Pour tenter d'y remédier, quelques-uns invoquent le théorème de Rolle. Pourtant plusieurs pistes ont permis à certains candidats de répondre correctement à la question : calcul de $u'(0)$ à l'aide de formule de Taylor avec reste intégral, étude de l'espaces des solutions de $u'' = -f$, résolution explicite de l'équation différentielle. Il est néanmoins très maladroit de résoudre cette équation avec la méthode de la variation des constantes ...

5.b) Cette question a été correctement résolue dans l'ensemble. Les candidats ont fait preuve d'imagination, en proposant des solutions variées : tableau de variations, concavité et interprétation géométrique, manipulation de la forme générale des solutions de (1) ...

5.c) Cette question facile fut en général bien traitée. Seuls quelques candidats ont fait preuve d'étourderie.

6.a) Le premier correcteur a remarqué avec plaisir que, par rapport à l'année dernière, les candidats manipulaient avec beaucoup plus d'aisance la formule de Taylor. Certains candidats ont encore quelques problèmes de mémoire, notamment pour la formule de Taylor avec reste intégral. La faute la plus courante consistait à manipuler des $o(h^5)$ et à les omettre au moment de conclure.

6.b) Les candidats ont en général bien traité cette question, seule la rédaction laissait parfois à désirer. Il ne suffit pas de répondre à une question par une suite de formules sans aucun texte.

7.a) Cette question facile fut en général bien traitée. Seuls quelques candidats ont décalé les diagonales de termes non nuls de la matrice, ou ont oublié le terme $1/h^2$.

7.b) La plupart des candidats ont su écrire correctement le produit scalaire sous forme de somme, mais se sont révélés incapables de la mettre sous forme d'une somme de carrés. Quelques étourdis ont oublié le terme en $1/h^2$ ou se sont trompés dans le domaine de définition de la somme.

7.c) Les candidats ont en général procédé de deux manières distinctes. Soit il ont reconnu en A une matrice symétrique réelle donc diagonalisable et ils ont cherché à montrer que toutes ses valeurs propres étaient strictement positives, soit ils ont voulu prouver que le noyau de l'endomorphisme associé à A était réduit à $\{0\}$. Dans les deux cas, beaucoup n'ont pu conclure, n'ayant pas traité la sous-question précédente.

8.a) La faute principale commise à cette question consistait à montrer que A vérifiait la propriété (P). Une fois cet écueil évité, les candidats introduisaient de bonnes suites de matrices et répondaient correctement.

8.b) Un bon nombre de candidats ont trouvé les composantes de $B\hat{F}$; toutefois la rédaction laissait souvent à désirer. L'encadrement n'a alors pas posé trop de problèmes à ceux qui ont considéré la variable x_i ; ceux qui ont cherché à manipuler à la fois les i et les n se sont parfois fourvoyés.

9.a) Cette question a posé problème à la plupart des candidats. Un bon nombre arrivait à majorer une combinaison linéaire de $u_i - u(x_i)$, sans faire le lien avec la matrice A. Très peu ont donc pu répondre correctement, la plupart se contentant d'appliquer l'inégalité triangulaire à l'envers.

9.b) Cette question a permis d'apprécier les différents niveaux d'intuition des candidats. Cependant nous n'avons trouvé que très peu de réponses satisfaisantes.

9.c) Les candidats ont pu calculer, directement ou avec l'aide d'une calculette, une valeur approchée du maximum de f'' mais, faute d'une formule juste à la question **9.a)**, ils ont fourni des valeurs de n aussi variées que fantaisistes. Nous avons constaté avec regret que la plupart des candidats ne disposant pas de calculatrice se sont trompés dans le calcul de la seconde dérivée de f.

Troisième partie

10.a) Les remarques faites à la question **5.a)** s'appliquent à cette question. Ici la résolution explicite était plus compliquée et a donc posé plus de problèmes.

10.b) Cette question a fait l'objet de nombreuses tentatives. Les candidats n'ont pas vu la grande difficulté de la question, se contentant de calculs de limites injustifiés. La faute la plus courante a été d'utiliser la compacité de $[0,1]$ pour affirmer qu'il existe une borne supérieure uniforme pour l'ensemble des fonctions $u^{[p]}$.

11.a) Les candidats qui ont traité cette question l'ont souvent bien fait. Parmi les erreurs les plus courantes, on note : la confusion $\cos - \mathrm{ch}$, l'introduction des fonctions $\exp(\pm x/\sqrt{p})$ et les fautes de calculs.

11.b) Ceux qui avaient correctement déterminé la fonction $\hat{u}^{[p]}$ ont en général trouvé les variations de cette fonction. Cependant, beaucoup se sont contenté d'une formule donnant l'abcisse du maximum, sans voir qu'elle valait $1/2$.

11.c) Personne n'a réussi à résoudre complètement cette question. Quelques candidats ont deviné la valeur $1/8$ en effectuant un développement limité. Un candidat a proposé de comparer les concavités de u et $\hat{u}^{[p]}$ pour déduire le résultat de la question **8.**

12.a) La plupart des candidats ne sont pas parvenus jusqu'à cette question. Ceux qui l'ont abordé l'ont fait de manière plutôt satisfaisante.

12.b) Cette question très difficile n'a fait l'objet que de rares tentatives infructueuses.