ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2003

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Trigonalisation simultanée d'endomorphismes unipotents

Notations. On désignera par K le corps des réels ou celui des complexes ; pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $M(n,K)$ l'espace des matrices à n-lignes et n-colonnes à coefficients dans K et on l'identifie à l'espace des endomorphismes de K^n. On note $SO(n,\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $M(n,\mathbf{R})$ formé des matrices orthogonales de déterminant 1.

La lettre E désignera toujours un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$; $L(E)$ désignera l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ désignera celui des endomorphismes inversibles. On dit qu'une partie F de E est *laissée stable* par un endomorphisme T si l'on a $T(F) \subset F$.

On appelle *commutant* d'une partie X d'une algèbre Y l'ensemble des éléments de Y qui commutent à tous les éléments de X.

Première partie

1. Soit A une matrice de $M(n,\mathbf{R})$, diagonale avec coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$; on suppose qu'il existe deux indices i et j tels que $a_i \neq a_j$. Vérifier que si une matrice B commute à A, on a $b_{i,j} = 0$.

2. Déterminer le commutant de $SO(2,\mathbf{R})$ dans $M(2,\mathbf{R})$.

3.a) Montrer que, si $n \geqslant 3$, le commutant de $SO(n,\mathbf{R})$ dans $M(n,\mathbf{R})$ est formé de matrices diagonales.

b) Déterminer ce commutant.

Deuxième partie

Une partie W de $L(E)$ sera dite *irréductible* si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces vectoriels de E laissés stables par tous les éléments de W.

4. Vérifier que, si $E = \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, $SO(n,\mathbf{R})$ est irréductible.

5. Vérifier que, si deux éléments A et B de $L(E)$ commutent, tout sous-espace propre de l'un deux est laissé stable par l'autre.

6. Montrer que, si $K = \mathbf{C}$, le commutant d'une partie irréductible de $L(E)$ est réduit aux multiples scalaires de l'endomorphisme identité, id_E.

7. Ce résultat subsiste-t-il lorsque $K = \mathbf{R}$?

Troisième partie

Un élément A de $L(E)$ est dit *unipotent* si $A - \mathrm{id}_E$ est nilpotent (c'est-à-dire s'il existe un entier $k > 0$ tel que $(A - \mathrm{id}_E)^k = 0$).

On se propose de démontrer que, si $K = \mathbf{C}$ et si G est un sous-groupe de $GL(E)$ formé d'éléments unipotents, E admet une base dans laquelle tous les éléments de G sont représentés par des matrices triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux égaux à 1.

8. Montrer que tout élément unipotent A est inversible, et déterminer la somme $\sum_{n \geqslant 0} (\mathrm{id}_E - A)^n$.

9. Traiter le cas où $n = 2$ et où G est l'ensemble des puissances d'un élément g_0. Dans ce cas, est-il nécessaire de supposer $K = \mathbf{C}$?

On suppose maintenant $n \geqslant 1$. On rappelle que $K = \mathbf{C}$.

10. Vérifier que le sous-espace vectoriel W de $L(E)$ engendré par G est une sous-algèbre de $L(E)$.

11. Calculer $\mathrm{Tr}\,(g - \mathrm{id}_E)$, $\mathrm{Tr}\,(g)$, $\mathrm{Tr}\,((g - \mathrm{id}_E)g')$ pour $g\,, g' \in G$.

12. Supposant en outre G irréductible, montrer que G est réduit à id_E, et préciser la valeur de n.

[On pourra utiliser le résultat suivant, qui sera démontré dans la **quatrième partie** : si $K = \mathbf{C}$ et si W est une sous-algèbre de $L(E)$, irréductible et contenant id_E, alors $W = L(E)$].

13. Ne supposant plus G irréductible, démontrer l'existence d'un vecteur non nul x de E tel que $g(x) = x$ pour tout $g \in G$.

14. Conclure.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat admis à la question **12.** Procédant par l'absurde, on suppose $W \neq L(E)$.

On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on identifie les éléments de $L(E)$ à leurs matrices représentatives dans cette base. Pour tout $i = 1, \dots, n$ on désigne par

- V_i l'ensemble des matrices A telles que $a_{k,\ell} = 0$ si $\ell \neq i$;
- L_i l'application de E dans V_i définie par

$$(L_i(x))_{k,\ell} = \delta_{i,\ell}\, x_k \ ;$$

- P_i l'application de $L(E)$ dans V_i définie par

$$(P_i(A))_{k,\ell} = \delta_{i,\ell}\, A_{k,i} \ .$$

Enfin on note Φ l'application linéaire de $L(E)$ dans $L(L(E))$ définie par

$$\Phi(A)(B) = A \circ B \ .$$

15. Démontrer les assertions suivantes :

a) V_i est invariant par tous les $\Phi(A)$, $A \in L(E)$ et $\Phi(A)(L_i(x)) = L_i(A(x))$.

b) $\Phi(A) \circ P_i = P_i \circ \Phi(A)$.

c) $W \cap V_i$ est nul ou égal à V_i.

16. Construire un sous-espace vectoriel W' de $L(E)$, supplémentaire de W et laissé stable par tous les $\Phi(A)$, $A \in L(E)$.

On note π le projecteur de $L(E)$ sur W parallèlement à W' ; pour $i, j = 1, \dots, n$, on pose

$$A_{i,j} = L_j^{-1} \circ P_j \circ \pi \circ L_i \in L(E) \ .$$

17. Montrer que $A_{i,j}$ est un multiple scalaire de id_E, que l'on notera $a_{i,j}\, \mathrm{id}_E$.

18. Vérifier les égalités suivantes :

a) $\pi(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$.

b) $\sum_i L_i(e_i) = \mathrm{id}_E$.

c) $P_i(\mathrm{id}_E) = L_i(e_i)$.

19. Déterminer $a_{i,j}$.

20. Conclure.

* *
*

Rapport de MM. Vincent COSSART et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Cette épreuve de mathématiques a été dans l'ensemble réussie. Comme l'indiquait le titre, il s'agissait d'établir un théorème de trigonalisation simultanée des éléments d'un groupe d'endomorphismes unipotents.

Certaines questions étaient difficiles, voire très difficiles : une dizaine de candidats a fait **16** et un seul **17** complétement. **12**, **13**, **14** et **15.c** ont posé des problèmes à la plupart des candidats. L'énoncé ne suggérait pas toujours la méthode de résolution, relativement variable au fil des questions. On pouvait obtenir la note de 20 en traitant correctement tout le problème, à l'exception de **16** et **17** : les meilleurs étudiants savent manipuler des notions abstraites comme le passage au quotient, les projecteurs, les polynômes d'endomorphismes. Certains ont développé des trésors d'ingéniosité qui ont fait plaisir aux correcteurs.

Les étudiants pour qui l'algèbre linéaire se limite à du calcul matriciel ont souffert : certains se sont arrêtés au début de la troisième partie, d'autres ont pu éviter le naufrage en repérant et en traitant correctement les questions faciles **15.a b**, **18.a b c** et, pour certains **19**. Ceux qui ont négligé les questions faciles mais un peu fastidieuses **2.**, **3.a b** ont perdu des points qu'ils n'ont jamais pu compenser.

Compte tenu du barème adopté, la moyenne des 1450 candidats français est de 9,32 avec un écart-type de 3,81 ; la répartition est la suivante :

$0 \leqslant N < 4$	7%
$4 \leqslant N < 8$	31%
$8 \leqslant N < 12$	39%
$12 \leqslant N < 16$	18%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	5%

Examen en détail des questions

1. est en général bien traitée.

2. a soulevé déjà quelque difficulté, certains ne connaissant pas la structure des éléments de $SO(2,\mathbb{R})$ et s'épuisant à la retrouver. Beaucoup ont reconnu que le commutant est l'ensemble des matrices de similitudes planes directes.

3.a La plupart des candidats ont appliqué la question **1.** avec les matrices diagonales avec $\epsilon = 1$ ou -1 comme coefficients diagonaux et deux signes $-$. Certains ont utilisé des matrices de permutation en plaçant un coefficient -1 éventuellement pour avoir un déterminant 1 (parfois en oubliant de vérifier la valeur du déterminant, ce qui a coûté quelques fractions de point) ou en utilisant des matrices « bloc-diagonales ». Ces derniers ont traité **3.a** et **3.b** d'un coup, mais ne s'en sont pas toujours aperçu et ont recopié en **3.b** une partie de leur preuve de **3.a**.

3.b Beaucoup ont utilisé **1.** en affirmant péremptoirement que, pour tout couple (i, j), $i \neq j$, il existait un élément de $SO(n, \mathbb{R})$ avec $b_{i,j} \neq 0$. Ils ont été sanctionnés.

4. a été sabotée. On a trop souvent lu qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ était engendré par un sous-ensemble de la base canonique. Beaucoup ont raisonné en utilisant des bases de E « adaptées » à F et en exhibant à l'aide de matrices un endomorphisme orthogonal qui ne laissait pas stable F. Malheureusement, dans leur majorité, ils ont oublié de préciser que leur base était orthonormale, ou bien ont pris des endomorphismes de déterminant -1 ou de déterminant variant avec la dimension.

5. Tous les candidats connaissent ce résultat, certains ont récité par cœur la preuve, parfois en en oubliant une partie ou en confondant avec un autre théorème et prouvant par exemple que l'image de A est stable par B.

6. a été bien réussie.

7. n'a pas été réussie, un petit tiers des candidats a invoqué le contre-exemple en **3.b**. Beaucoup ont vu que la preuve de **6.** nécessitait que $\mathbb{C}$ soit algébriquement clos et, cette preuve ne marchant pas, ont affirmé que « le résultat était donc faux ».

8. Tous les candidats ou presque ont vu que la somme était finie. Beaucoup ont vu que $\mathrm{id}_E + N + \ldots + N^{n-1}$ était l'inverse de A, mais la plupart d'entre eux se sont sentis obligés de prouver d'abord que A était inversible.

9. Les bons candidats n'ont eu aucun problème et ont pris le temps de convaincre les correcteurs qu'ils savaient trianguler quand le polynôme caractéristique est scindé.

10. a été bien réussie par ceux qui savent ce qu'est une algèbre. Beaucoup croient que dans une algèbre tout élément est inversible, certains le prouvent...

11. Certains ont eu du mal à prouver que $\mathrm{Tr}(g - gg') = 0$. D'autres ont déclaré que le résultat était trivial et se sont contentés de l'écrire : ils ont eu la note 0 à la question, un très bon candidat n'a pas eu la note 20 à cause de cette négligence.

12. était le début des choses sérieuses. Les solutions proposées relèvent souvent du bluff. Certains ont bien vu que $\mathrm{Tr}((g - \mathrm{id}_E)u) = 0 \ \forall u \in W = L(E)$, et ont admis qu'alors $g - \mathrm{id}_E = 0$; d'autres l'ont prouvé, le plus souvent en prenant pour u une matrice élémentaire, ou en utilisant l'application $(u, v) \longrightarrow \mathrm{Tr}(u\bar{v})$.

13. a été peu touchée et mal réussie. Beaucoup ont admis (ou affirmé, voire prouvé...) que G était commutatif et ont utilisé **5.**, ce qui ne leur a donné aucun point. D'autres ont mal posé la récurrence sur n, et ont oublié de montrer que la restriction de G à un sous-espace stable était définie et était un groupe d'unipotents.

14. a été peu touchée et mal réussie. Ceux qui se sont risqués, ont fait une récurrence sur n. Certains ont essayé de quotienter en regardant les endomorphismes induits de G sur $E/\mathbb{C}x$, dans $E/\mathbb{C}x$: ce fut en général très peu justifié. Une récurrence sur des blocs de matrices a donné de meilleurs résultats. Certains candidats très ingénieux sont passés au conjugué G^* de G pour la structure hermitienne naturelle : G^* a un hyperplan stable, on applique la récurrence à la restriction de G^* à cet hyperplan et le tour est joué.

15.a,b ont été bien réussies, même par des candidats très médiocres.

15.c a fait l'objet de bluff, de longues phrases ne prouvant rien. Pourtant cette question paraissait facile. Il suffisait d'invoquer l'isomorphisme naturel entre V_i et E.

16. a été très peu touchée. Beaucoup de candidats ont cru que $W' = \oplus_{V_i \cap W = \{0\}} V_i$. Pour prouver ce résultat faux, ils ont utilisé des formules de calcul étranges employant les $\cap$, $\oplus$. Certains sont allés plus loin en affirmant en plus que $W = \oplus_{V_i \cap W = V_i} V_i$. Cela leur a coûté fort cher : ils ont cru ainsi obtenir dans la foulée **18.a,b,c** et **19.** qui étaient des questions faciles. Ils ont perdu tous les points prévus au barème.

17. était la question difficile. En plus, elle faisait appel à **6.** qui était bien loin. Certains ont eu la bonne intuition et ont commencé à montrer que $A_{i,j}$ commute avec tout élément B de W, mais ils n'ont pas bien su manier π qui, comme l'a dit un candidat, « projette de travers ».

18.a a posé quelques problèmes à certains qui n'ont pas vu pourquoi $\mathrm{id}_E \in W$.

18.b,c a été très bien réussie même par des candidats très médiocres et malheureusement a été oubliée par d'autres qui semblaient bons, voire très bons.

19. était un petit peu plus difficile. Mais on peut faire la même remarque que ci-dessus.

20. a été bien réussie par les très bons candidats mais aussi par d'autres moins bons qui ont eu l'intuition du résultat de **16.**, l'ont clairement admis et ont pu obtenir une contradiction en montrant l'existence d'un V_i tel que V_i apparaît dans la décomposition de W'.