ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2003

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle

On désigne par

- E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues bornées sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup_{t \in J} |f(t)|$;
- $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E, muni de la norme

$$A \mapsto \|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|A(f)\| \ ;$$

- I_E l'endomorphisme identité de E ;
- Δ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (t, τ) vérifiant $1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Première partie

Dans cette partie on désigne par k une fonction complexe continue bornée sur Δ et on pose $\|k\| = \sup_{(t,\tau) \in \Delta} |k(t, \tau)|$.

1. Vérifier que, pour toute fonction u de E, la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_t^\infty k(t, \tau) u(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}$ est bien définie sur J et appartient à E.

2. Vérifier que, si l'on note $A(u)$ la fonction ainsi définie, on définit un élément A de $\mathcal{L}(E)$; comparer $\|A\|$ et $\|k\|$.

3. Déterminer une constante $K \geqslant 0$ telle que l'on ait, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in J$

$$\left|\Big(A^n(u)\Big)(t)\right| \leqslant \frac{K^n \|u\|}{n!\, t^n} \ .$$

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, et calculer le produit $(I_E - A) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

On fixe une fonction u_0 de E et on considère l'équation intégrale

$$u(t) = u_0(t) + \int_t^{\infty} k(t,\tau)u(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} \tag{1}$$

où u est une fonction inconnue dans E.

5. Quel est le nombre de solutions de (1) ?

Deuxième partie

On s'intéresse maintenant à l'équation (1) où l'on prend

$$u_0(t) = e^{\varepsilon it} \quad , \quad k(t,\tau) = \lambda \sin(t-\tau)$$

($\varepsilon \in \{+,-\}, \lambda \in \mathbf{C}$). On note u_ε sa solution.

6. Montrer que u_ε est de classe C^∞.

7. Vérifier que u_ε est solution sur J de l'équation différentielle

$$u''(t) + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right) u(t) = 0\ . \tag{2}$$

8. Le couple (u_+, u_-) est-il une base de l'espace vectoriel des solutions de (2) dans E ?

Troisième partie

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la fonction $u = u_+$ lorsque $t \to +\infty$. On dit qu'une fonction f de E admet un *développement asymptotique à l'ordre* $k \geqslant 0$ s'il existe des constantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ telles que l'on ait

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)$$

(ce qui signifie que la fonction $t^{k+1}\left(f(t) - \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{t^j}\right)$ est bornée).

On admettra qu'une telle famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$, si elle existe, est unique. On dit qu'une fonction f de E admet un *développement asymptotique à l'ordre* ∞ si elle admet un développement asymptotique à tout ordre k.

9. On se propose ici de construire un développement asymptotique à l'ordre ∞ pour chacune des fonctions

$$\varphi_n(t) = e^{-it} \int_t^{\infty} \sin(t-\tau) \frac{e^{i\tau}}{\tau^{n+2}} \mathrm{d}\tau \quad (n \text{ entier } \geqslant 0 \quad , \quad t \in [1, +\infty[)\ ,$$

développement asymptotique que l'on écrira

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j} \frac{1}{t^{n+j}} + O\left(\frac{1}{t^{n+k+1}}\right) . \tag{3}$$

a) Vérifier que, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_t^{\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} \mathrm{d}\tau = O\left(\frac{1}{t^m}\right)$.

b) Établir, pour tous entiers $n \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, la formule

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j \; t^{n+j}} - \frac{(n+k)! \; e^{-2it}}{(2i)^k} \int_t^{\infty} \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} \mathrm{d}\tau \right] .$$

c) Conclure.

10. On se propose maintenant de construire un développement asymptotique à l'ordre ∞ pour la fonction $e^{-it}u(t)$; on a donc, par définition

$$u(t) = e^{it} + \lambda \int_t^{\infty} \sin(t-\tau) u(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} . \tag{4}$$

On écrira ce développement asymptotique sous la forme

$$e^{-it}u(t) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right) .$$

a) Vérifier que l'on a

$$e^{-it}u(t) = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) .$$

b) Supposant construits $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$, écrire γ_{n+1} en fonction de $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ et des divers $\alpha_{p,q}$.

c) Vérifier que l'on a

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2i}\left(n + \frac{\lambda}{n+1}\right) \gamma_n .$$

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$?

* *
*

Rapport de $\mathrm{M^{me}}$ Hajer BAHOURI et M. Bertrand MONTHUBERT, correcteurs.

Le sujet, cette année, proposait l'étude des propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle induite par une équation intégrale.

Ce problème était très abordable, mais comportait quelques subtilités dont nous regrettons que trop peu d'étudiants les aient comprises.

Compte tenu du barème adopté, la moyenne des 1450 candidats français est de 10,34 avec un écart-type de 4,29 ; la répartition est la suivante :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	7%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	25%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	31%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	25%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	12%

La **première partie** reposait sur l'étude d'un opérateur A sur l'espace $C_b([1, +\infty[)$. La difficulté principale consistait à montrer la continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre. Très peu de candidats ont vu qu'il y avait une difficulté.

Une autre difficulté se trouvait dans la **question 4**, où il s'agissait de prouver la convergence d'une série d'opérateurs d'un espace de Hilbert. Si la plupart des candidats ont bien vu qu'il s'agissait d'une convergence normale, peu ont justifié le fait que la convergence normale entraînait la convergence car on se trouvait dans un espace complet, ce qui était pourtant central.

En revanche, nous avons pu noter une grande aisance pour utiliser des raisonnements classiques.

Dans la **deuxième partie**, il s'agissait de montrer qu'une équation fonctionnelle particulière induisait une équation différentielle. La **question 6** consistait à montrer que les solutions de l'équation fonctionnelle étaient de classe C^∞. Cette question a souvent été mal traitée. Le reste n'a pas posé de problème méritant d'être signalé.

Dans la **troisième partie**, il fallait étudier les propriétés asymptotiques d'une solution de l'équation différentielle précédente. Il était possible d'aborder cette partie sans avoir fait les autres, beaucoup de questions étant d'ailleurs fermées. Il y avait peu de difficultés, mais notons que la **question 9.a)**, où il fallait vérifier que

$$\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} \mathrm{d}\tau = O(\frac{1}{\tau^m})$$

nécessitait de faire une intégration par parties, et pas une majoration grossière. Un nombre conséquent de candidats se sont contentés de cette majoration, et ont effectué ensuite une comparaison absurde sans sourciller. Cet exemple est emblématique d'un phénomène que nous avons retrouvé dans un nombre non négligeable de copies : des candidats répondent à des questions fermées en faisant des raisonnements faux qu'ils triturent pour aboutir au résultat, au besoin en bluffant. Nous avons été particulièrement sévères face à ce choix.

On a pu retrouver de telles tentatives dans la **question 10.b)**, qui était ouverte, mais induisait la **question 10.c)**, fermée celle-là : certains candidats ont pensé pouvoir trouver la réponse **10.b)** grâce à **10.c)**, ce qui provoquait souvent des erreurs...

En conclusion, ce sujet comportait assez peu de difficultés importantes, qui consistaient plutôt à voir que certains faits devaient être établis avec discernement.

Nous avons donc constaté que les techniques classiques d'analyse sont généralement maîtrisées, mais que le passage à un cadre un peu plus difficile – comme des espaces vectoriels normés de dimension infinie, des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre – engendrait trop rarement la prudence des candidats. Par ailleurs, la structure du problème, avec une troisième partie pouvant être traitée sans avoir donné de bonnes réponses aux parties précédentes, a conduit de nombreux candidats à couvrir une part importante du problème sans pour autant avoir un bon résultat.